

ОЛЕКСАНДР ІСТЕР

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
закладів загальної середньої освіти

2-ге видання, перероблене

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*



Київ
«Генеза»
2022

Шановні дев'ятикласники та дев'ятикласниці!

Цьогоріч ви продовжите вивчати одну з найважливіших математичних дисциплін – алгебру. Допоможе вам у цьому підручник, який ви тримаєте в руках.

Під час вивчення теоретичного матеріалу зверніть увагу на текст, надрукований **жирним** шрифтом. Його треба запам'ятати. Зверніть увагу й на умовні позначення:



– треба запам'ятати;



– вправи для повторення;



– запитання і завдання до теоретичного матеріалу;



– вправи для підготовки до вивчення нової теми;

1 – завдання для класної роботи;

2 – завдання для домашньої роботи;



– рубрика «Життєва математика»;



– рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих»;



– рубрика «Головне в розділі»;



– вправи початкового рівня;



– вправи середнього рівня;



– вправи достатнього рівня;



– вправи високого рівня.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематично-го оцінювання можна, виконуючи завдання «Домашньої самостійної роботи» та «Завдання для перевірки знань». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника – «Завдання для перевірки знань за курс алгебри 9 класу». «Задачі підвищеної складності» допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики. Також підручник вміщує зразок варіанта атестаційної письмової роботи.

Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково треба опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість з них ви розглянете на уроках та під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

Цікаві факти з історії розвитку та становлення математики як науки ви знайдете в рубриці «А ще раніше...».

Шановні вчительки та вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обираєте їх для використання на уроках і позаурочних заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня диференціації навчання тощо.

Додаткові вправи рубрики «Завдання для перевірки знань» призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Їх правильне розв'язання вчитель може оцінити окремо. Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням під час узагальнювальних уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року. У кінці підручника наведено зразок варіанта атестаційної письмової роботи. Задачі підвищеної складності та «Цікаві задачі для учнів неледачих» допоможуть задоволити підвищену цікавість учнів до предмета і сприятимуть їх підготовці до різноманітних математичних змагань.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків з алгебри, потрібно запропонувати їй за підручником у дома самостійно опрацювати матеріал цих уроків. Спочатку учень має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою та який містить значну кількість зразків виконання вправ, а потім із запропонованих у відповідному тематичному параграфі завдань розв'язати посильні йому вправи.

Упродовж опрацювання дитиною курсу алгебри 9 класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині виконати завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.



Розділ 1

Нерівності

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** числові нерівності, подвійні нерівності;
- **ознайомитеся** з поняттями об'єднання і перерізу множин, лінійними нерівностями з однією змінною та їх системами;
- **дізнаєтесь** про властивості числових нерівностей;
- **навчитеся** розв'язувати лінійні нерівності з однією змінною та системи лінійних нерівностей з однією змінною.



1. ЧИСЛОВІ НЕРІВНОСТІ

У попередніх класах ви навчилися порівнювати будь-які числа та записувати результат порівняння у вигляді рівності або нерівності, використовуючи знаки $=$, $>$, $<$. На-

приклад, $0,4 = \frac{2}{5}$, $-2 > -11$, $5 < 7$. Вираз, який записано зліва від знака нерівності, називають *лівою частиною нерівності*, а вираз, який записано справа, – *правою частиною нерівності*. Так, в останній нерівності лівою частиною нерівності є число 5, а правою – число 7.

Нерівність, обидві частини якої – числа або числові вирази, називають *числовою нерівністю*. Наприклад,

$$1,2 > -0,8; \sqrt{2} < 2; 0,1 < \frac{1}{9}; \sqrt{7} + 2 > \sqrt{8}.$$

Для двох довільних чисел a і b правильним є одне і тільки одне із співвідношень: $a > b$, $a < b$ або $a = b$. Раніше ми використовували те чи інше правило порівняння чисел залежно від виду чисел (натуральні числа, десяткові дроби, звичайні дроби з одинаковими або різними знаменниками). Але зручно було б мати універсальне правило порівняння.

Відомо, що $5 > 2$. Розглянемо різницю лівої і правої частин цієї нерівності: $5 - 2 = 3 > 0$, різниця є додатною. Розглядаючи різницю лівої і правої частин нерівності $3 < 7$, матимемо: $3 - 7 = -4 < 0$, різниця є від'ємною. У рівності $4 = 4$, розглянувши різницю лівої і правої частин, отримаємо: $4 - 4 = 0$, тобто різниця дорівнює нулю.

Приходимо до означення порівняння чисел.



- $a > b$, якщо $a - b > 0$;
- $a < b$, якщо $a - b < 0$;
- $a = b$, якщо $a - b = 0$.

Приклад 1. Порівняти $\frac{5}{9}$ і $0,6$.

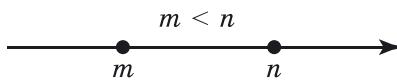
Розв'язання. Розглянемо різницю чисел $\frac{5}{9}$ і $0,6$:

$$\frac{5}{9} - 0,6 = \frac{5}{9} - \frac{3}{5} = \frac{25 - 27}{45} = -\frac{2}{45} < 0.$$

Різниця є від'ємною, тому $\frac{5}{9} < 0,6$.

Відповідь. $\frac{5}{9} < 0,6$.

Нагадаємо, що на координатній прямій меншому числу відповідає точка, що лежить зліва від точки, що відповідає більшому числу. На малюнку 1 точка, що відповідає числу m , лежить зліва від точки, що відповідає числу n , тому $m < n$.



Мал. 1

Числові нерівності бувають *правильні* і *неправильні*.

Наприклад, $\frac{5}{9} < 0,6$; $\sqrt{2} > 1$ – правильні числові нерівності, $1,8 > 2$; $\frac{3}{8} < -0,1$ – неправильні числові нерівності.

Крім знаків $>$ і $<$, які називають *знаками строгої нерівності*, у математиці також використовують знаки \leqslant (читають: «менше або дорівнює», або «не більше») і \geqslant («більше або дорівнює», або «не менше»). Знаки \geqslant і \leqslant називають *знаками нестрогої нерівності*. Нерівності, які містять знак $>$ або $<$, називають *строгими нерівностями*, а ті, що містять знак \geqslant або \leqslant , – *нестрогими нерівностями*.

З означення співвідношень «більше», «менше» і «дорівнює» доходимо висновку, що $a \geqslant b$, якщо $a - b \geqslant 0$, і $a \leqslant b$, якщо $a - b \leqslant 0$.

Розглянемо, як за допомогою означення порівняння чисел можна *доводити нерівності*.

Приклад 2. Довести, що для будь-якого значення a справджується нерівність

$$(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4).$$

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності та спростили її:

$$(a - 3)^2 - (a - 2)(a - 4) = a^2 - 6a + 9 - (a^2 - 2a - 4a + 8) = a^2 - 6a + 9 - a^2 + 6a - 8 = 1 > 0.$$

Оскільки $(a - 3)^2 - (a - 2)(a - 4) > 0$ для будь-якого значення a , то для будь-якого значення a спрощується нерівність $(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4)$, що й треба було довести.

Умову для прикладу 2 можна було сформулювати коротше, наприклад: довести нерівність $(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4)$.

Приклад 3. Довести нерівність $2(x - 8) \leq x(x - 6)$.

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності та спростили її:

$$2(x - 8) - x(x - 6) = 2x - 16 - x^2 + 6x = -x^2 + 8x - 16 = -(x^2 - 8x + 16) = -(x - 4)^2.$$

Оскільки $(x - 4)^2 \geq 0$ для будь-якого значення x , то $-(x - 4)^2 \leq 0$. Отже, за означенням, нерівність $2(x - 8) \leq x(x - 6)$ є правильною при будь-якому x , що й треба було довести.

Приклад 4. Довести нерівність $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 > 0$.

Доведення. У виразі, який записано в лівій частині нерівності, виділимо квадрати двочленів:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + 15 = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 2.$$

Для будь-яких значень x і y : $(x + 2)^2 \geq 0$ і $(y - 3)^2 \geq 0$.

Тому $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 \geq 0$, а $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 2 > 0$.

Отже, $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 > 0$, що й треба було довести.

Нагадаємо, що число $\frac{a+b}{2}$ називають *середнім арифметичним* чисел a і b . Для невід'ємних чисел a і b число

\sqrt{ab} називають їх *середнім геометричним*.

Приклад 5. Довести, що середнє арифметичне двох невід'ємних чисел a і b не менше від їх середнього геометричного (нерівність Коши):

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ де } a \geq 0, b \geq 0.$$

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності та перетворимо її, врахувавши, що $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ для $a \geq 0, b \geq 0$. Матимемо:

- $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2} =$
- $= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$ для всіх $a \geq 0$ і $b \geq 0$.
- Отже, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для будь-яких $a \geq 0$, $b \geq 0$, що й треба було довести.

Зауважимо, що знак рівності в нерівності Коші можливий тоді і тільки тоді, коли $a = b$. Якщо $a \neq b$, то $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

А ще раніше...

Поняття «більше» й «менше» виникли одночасно з поняттям «дорівнювати».

Адже ще з давніх часів у практичній діяльності людини виникла потреба порівнювати кількість предметів, довжини відрізків, площині ділянок тощо. Так, наприклад, кілька нерівностей є й у видатній праці «Начала» давньогрецького математика Евкліда (бл. 356–300 до н. е.). Зокрема, він наводить доведення нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для додатних чисел a і b геометричним методом.

Інший давньогрецький фізик і математик Архімед (бл. 287–212 до н. е.), щоб оцінити значення відношення довжини кола C до його діаметра d (пізніше назване числом π), використовує нерівність:

$$3 \frac{10}{71} < \frac{C}{d} < 3 \frac{1}{7}.$$

Звичні нам символи для запису нерівностей з'явилися лише в XVII–XVIII ст. Знаки строгої нерівності ($>$ і $<$) уперше вжив англійський математик Томас Харріот (1560–1621) у праці «Практика аналітичного мистецтва», що вийшла друком у 1631 р. А знаки нестрогої нерівності (\geq і \leq) – у 1734 р. французький математик і астроном П'єр Бугер (1698–1758).

З відомих нерівностей, крім нерівності Коші, зазначимо такі:

1) Нерівність *Бернуллі*.

$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$, де $x \geq -1$, α – ціле число.

2) Нерівність *Чебишова*.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n},$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ – додатні числа і $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$.

3) Нерівність Коши–Буняковського.

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2,$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ – довільні числа.

Остання нерівність була доведена французьким математиком О.Л. Коши (1789–1857) та нашим земляком В.Я. Буняковським.

Віктор Якович Буняковський (1804–1889) народився в містечку Бар (нині – Вінницька обл.). Навчався він здебільшого за кордоном, в основному у Франції, де його найближчим наставником був сам Коши. У 1825 р. в Паризькому університеті Буняковський захистив дисертацію і отримав ступінь доктора наук. Його дослідження стосувалися галузі прикладної математики та математичної фізики.



У 1826 р. він повертається з Парижа до Петербурга та починає викладати математику і механіку у відомих на той час навчальних закладах. Одночасно він перекладав праці Коши з французької.



Назвіть ліву і праву частини нерівності $-5 > -10$.
• Наведіть приклади числових нерівностей. • Сформулюйте означення порівняння чисел. • Які нерівності називають строгими? Нестрогими? • Сформулюйте та доведіть нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним двох невід'ємних чисел (нерівність Коши).



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



1. Порівняйте числа:

- | | | |
|--------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------|
| 1) $0,8$ і $0,7$; | 2) $-1,2$ і $-1,25$; | 3) $1\frac{2}{3}$ і $\frac{2}{3}$; |
| 4) $-\frac{4}{7}$ і $-\frac{3}{7}$; | 5) π і 3 ; | 6) $-2,31$ і 0 . |

2. Порівняйте числа:

- | | | |
|--------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------|
| 1) $1,8$ і $1,9$; | 2) $-1,3$ і $-1,27$; | 3) $\frac{4}{5}$ і $2\frac{4}{5}$; |
| 4) $-\frac{5}{8}$ і $-\frac{7}{8}$; | 5) 4 і π ; | 6) 0 і $-3,71$. |

3. (Усно). Які із числових нерівностей правильні:

- | | | |
|----------------------------|---------------------|-------------------|
| 1) $2,7 > -3,1$; | 2) $0,5 < -3,17$; | 3) $7,8 > 7,08$; |
| 4) $4,1 < 4\frac{1}{10}$; | 5) $-7,1 > -7,19$; | 6) $5,05 < 5,5?$ |

4. Порівняйте числа a і b , якщо:
 1) $a - b = 5$; 2) $a - b = 0$; 3) $a - b = -7$.
5. Порівняйте числа m і n , якщо різниця $m - n$ дорівнює:
 1) -18 ; 2) $1,7$; 3) 0 .
6. Яке із чисел x чи y менше, якщо:
 1) $x + 4 = y$; 2) $y - 2 = x$;
 3) $y + 2 = x$; 4) $x - 3 = y$?
7. Яке із чисел a чи b більше, якщо:
 1) $a - 7 = b$; 2) $a + 3 = b$;
 3) $b + 2 = a$; 4) $b - 5 = a$?
8. Позначте на координатній прямій точки, що відповідають числам m , n і p , якщо $m < n$ і $p > n$.
9. Запишіть у порядку зростання числа:
 $\frac{4}{5}; -\frac{3}{7}; -0,1; 0; \frac{3}{8}; -1,2; 0,7.$
10. Запишіть у порядку спадання числа:
 $-1,2; \frac{3}{4}; 0; -0,99; 0,8; -0,6; 0,51.$
11. Укажіть серед даних нерівностей ті, що є правильними для будь-якого значення x :
 1) $x^2 > 0$; 2) $x^2 \geq 0$; 3) $x + 1 > 0$;
 4) $x^2 + 1 > 0$; 5) $(x - 3)^2 \geq 0$; 6) $(x + 4)^2 > 0$;
 7) $x > -x$; 8) $-x \leq x$.
12. Доведіть нерівність:
 1) $3m + 5 > 3(m - 1)$; 2) $p(p - 2) < p^2 - 2p + 7$;
 3) $(a + 1)(a - 1) < a^2$; 4) $x(x + 2) > 2x - 1$.
13. Доведіть нерівність:
 1) $2a - 3 < 2(a - 1)$; 2) $c(c + 2) > c^2 + 2c - 3$;
 3) $(x + 2)(x - 2) + 5 > x^2$; 4) $3m - 2 < m(m + 3)$.
14. Доведіть нерівність:
 1) $x^2 + y^2 \geq -2xy$; 2) $p(p - 6) \geq -9$;
 3) $a(a + b) \geq ab$; 4) $m^2 + 5m + 4 \geq m$.
15. Доведіть нерівність:
 1) $m^2 + n^2 \geq 2mn$; 2) $t(t + 2) \geq -1$;
 3) $c(c - d) \geq -cd$; 4) $p^2 - 11p + 36 \geq p$.
16. Порівняйте числа:
 1) $\sqrt{5} - 2$ і $\frac{1}{\sqrt{5} + 2}$; 2) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ і $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$.

17. Порівняйте числа:

$$1) \sqrt{3} - 1 \text{ i } \frac{1}{\sqrt{3} + 1}; \quad 2) 4 + \sqrt{15} \text{ i } \frac{1}{4 - \sqrt{15}}.$$

18. Доведіть нерівність:

$$1) a^2 + 10a + 26 > 0; \quad 2) 8a < a^2 + 20.$$

19. Доведіть нерівність:

$$1) b^2 - 4b + 7 > 0; \quad 2) -2b < b^2 + 2.$$

20. Нехай x – довільне число. Порівняйте з нулем значення виразу:

$$1) x^2 + 5; \quad 2) -(x - 1)^2 - 3; \quad 3) (x - 7)^2; \\ 4) -(x + 9)^2; \quad 5) 9 + (x - 1)^2; \quad 6) (x - 1)^2 + (x - 2)^2.$$

21. Доведіть, що: 1) $x^3 - 3x^2 + x - 3 \geq 0$, якщо $x \geq 3$;

$$2) \frac{3}{a+3} > \frac{1}{a+1}, \text{ якщо } a \text{ – додатне число.}$$

22. Доведіть, що: 1) $m^3 + m^2 + 5m + 5 \geq 0$, якщо $m \geq -1$;

$$2) \frac{p}{p+7} < \frac{p+1}{p+8}, \text{ якщо } p \text{ – додатне число.}$$

4 **23.** Доведіть нерівність:

$$1) m^2 + 4m + p^2 + 2p + 5 \geq 0; \\ 2) a^2 + b^2 \geq 4(a + b) - 8; \\ 3) m^2 + n^2 + 1 \geq m + n + mn; \\ 4) a^2 + b^2 + c^2 > 2(a + b + c) - 4.$$

24. Для кожного додатного значення a доведіть, що:

$$1) a^3 + 2a^2 + a > 0; \quad 2) a^3 + 1 \geq a^2 + a; \\ 3) (a + 1)^3 \leq 4(a^3 + 1); \quad 4) a^6 - a^5 + a^4 > 0.$$

25. Для кожного від'ємного значення p доведіть, що:

$$1) p^3 + 10p^2 + 25p \leq 0; \quad 2) 1 - p^3 > p - p^2.$$

26. Доведіть, що:

$$1) \frac{7a}{2b} + \frac{8b}{7a} \geq 4, \text{ якщо } a \text{ і } b \text{ – числа одного знака;} \\ 2) \frac{3m}{5n} + \frac{5n}{12m} \leq -1, \text{ якщо } m \text{ і } n \text{ – числа різних знаків.}$$

27. Доведіть, що:

$$1) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \text{ якщо } a > 0, b > 0;$$

$$2) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2, \text{ якщо } a < 0, b > 0.$$

28. Порівняйте значення виразів $m^3 + n^3$ і $mn(m + n)$, якщо m і n – додатні числа, $m \neq n$.

29. До кожного із чисел 2, 3, 4, 5 додали одне й те саме число a . Порівняйте добуток першого й четвертого виразів, що утворилися, з добутком другого й третього.



Вправи для повторення

2 30. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; 2) $5x^2 - 2x - 3 = 0$.

31. Побудуйте графік функції:

1) $y = 3x - 5$; 2) $y = 7$; 3) $y = -0,2x$.

3 32. Трактористи мали зорати поле площею 40 га. Кожен день вони орали на 1 га більше, ніж планували, а тому закінчили оранку на 2 дні раніше визначеного терміну. За скільки днів трактористи зорали поле?

4 33. Обчисліть значення суми:

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{49} + \sqrt{45}}.$$



Життєва математика

34. Для будівництва гаража можна використати один з двох типів фундаменту: бетонний або з піноблоків. Для фундаменту з піноблоків потрібно 3 кубометри піноблоків і 6 мішків цементу. Для бетонного фундаменту потрібно 3 тонни щебеню і 30 мішків цементу. Кубометр піноблоків коштує 780 грн, щебінь – 185 грн за тонну, а мішок цементу коштує 65 грн. Скільки коштуватиме матеріал, якщо вибрати найдешевший тип фундаменту?



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

35. Прочитайте запис:

1) $a \leqslant 7$;	2) $b > -8$;	3) $x < -2$;
4) $m \geqslant 0$;	5) $-2 < x \leqslant 3$;	6) $0 < p < 5$;
7) $3 \leqslant c \leqslant 5$;	8) $-5 \leqslant y < 7$.	

36. Чи правильне твердження:

1) якщо $a = b$, то $b = a$;

- 2) якщо $a = b$, $b = c$, то $a = c$;
 3) якщо $a = b$ і p – будь-яке число, то $a + p = b + p$;
 4) якщо $a = b$ і p – будь-яке число, то $a - p = b - p$?

37. Порівняйте числа x і y , якщо:

- 1) $x < 0$, $y > 0$; 2) $x \geq 0$, $y < 0$;
 3) $x > 0$, $y \leq 0$; 4) $x \leq 0$, $y > 0$.



Цікаві задачі для чинів нелегачів

38. Водій планував їхати з міста A в місто B зі швидкістю 60 км/год, а повернутися назад зі швидкістю 80 км/год. Та, повертаючись назад, проїхав половину шляху із запланованою швидкістю і зупинився на ночівлю. Яка середня швидкість водія за описаний проміжок часу?



§2. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Розглянемо властивості числових нерівностей.



Властивість 1. Якщо $a > b$, то $b < a$;
якщо $a < b$, то $b > a$.

Доведення. Оскільки $a > b$, то $a - b > 0$. Тоді $-(a - b) < 0$, але $-(a - b) = b - a$, тому $b - a < 0$. Отже, $b < a$. Аналогічні міркування можна провести, коли $a < b$.

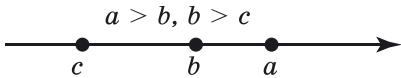


Властивість 2. Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$;
якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

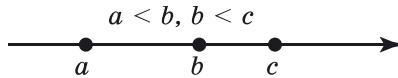
Доведення. За умовою $a > b$ і $b > c$. Тому $a - b > 0$ і $b - c > 0$, тобто $a - b$ і $b - c$ – додатні числа. Розглянемо різницю $a - c$. Маємо: $a - c = a - c - b + b = (a - b) + (b - c) > 0$ (оскільки $a - b$ і $b - c$ – додатні числа). Тому $a > c$.

Аналогічні міркування можна провести, коли $a < b$ і $b < c$.

Геометричні ілюстрації до властивості 2 подано на малюнках 2 і 3.



Мал. 2



Мал. 3



Властивість 3. Якщо $a > b$ і p – будь-яке число, то $a + p > b + p$.

Доведення. За умовою $a > b$, тому $a - b > 0$. Розглянемо різницю $(a + p) - (b + p)$ та перетворимо її:

$$(a + p) - (b + p) = a + p - b - p = a - b > 0.$$

Тому $a + p > b + p$.



Наслідо к. Якщо $a > b + m$, то $a - m > b$.

Доведення. Оскільки $a > b + m$, то $a - (b + m) > 0$, тобто $a - b - m > 0$. Але $a - b - m = (a - m) - b$, тому $(a - m) - b > 0$. Отже, $a - m > b$.

Із цього наслідку випливає:



якщо деякий доданок перенести з однієї частини правильної нерівності у другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то одержимо правильну нерівність.



Властивість 4. Якщо $a > b$ і $p > 0$, то $ap > bp$; якщо $a > b$ і $p < 0$, то $ap < bp$.

Доведення. Нехай $a > b$, тоді $a - b > 0$. Розглянемо різницю $ap - bp$ і перетворимо її: $ap - bp = p(a - b)$.

Якщо $p > 0$, то $p(a - b) > 0$, тому $ap > bp$;

якщо $p < 0$, то $p(a - b) < 0$, тому $ap < bp$.

Оскільки ділення можна замінити множенням на число, обернене до дільника $\left(\frac{a}{q} = a \cdot \frac{1}{q}\right)$, то аналогічна властивість справдіжується і у випадку ділення обох частин нерівності на відмінне від нуля число q .

Отже,



якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність; якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число та змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність.



Наслідо к. Якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Доведення. Поділимо ліву і праву частини нерівності $a > b$ на додатне число ab . Матимемо: $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$; $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, тобто $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Приклад 1. Дано: $m > n$. Порівняти:

- 1) $m + 1$ і $n + 1$;
- 2) $n - 5$ і $m - 5$;
- 3) $1,7m$ і $1,7n$;
- 4) $-m$ і $-n$;
- 5) $-10n$ і $-10m$;
- 6) $\frac{m}{8}$ і $\frac{n}{8}$.

Розв'язання. 1) Якщо до обох частин правильної нерівності $m > n$ додамо число 1, то за властивістю 3 матимемо: $m + 1 > n + 1$.

2) Якщо до обох частин правильної нерівності $m > n$ додамо число -5 , то за властивістю 3 матимемо правильну нерівність $m - 5 > n - 5$, тобто $n - 5 < m - 5$.

3) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ помножимо на додатне число 1,7, то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $1,7m > 1,7n$.

4) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ помножимо на від'ємне число -1 , то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $-m < -n$.

5) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ помножимо на від'ємне число -10 , то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $-10m < -10n$, тобто $-10n > -10m$.

Записати розв'язання таких вправ можна й коротше:

$$\begin{aligned} m &> n \mid \cdot (-10) \\ -10m &< -10n; \\ -10n &> -10m. \end{aligned}$$

6) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ поділимо на додатне число 8, то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $\frac{m}{8} > \frac{n}{8}$.

Відповідь. 1) $m + 1 > n + 1$;

2) $n - 5 < m - 5$;

3) $1,7m > 1,7n$;

4) $-m < -n$;

5) $-10n > -10m$;

6) $\frac{m}{8} > \frac{n}{8}$.

Нагадаємо, що в математиці трапляються також *подвійні числові нерівності*: $a < b < c$, $a \leq b < c$, $a < b \leq c$, $a \leq b \leq c$. Наприклад, подвійна нерівність $a < b < c$ означає, що одночасно справджаються нерівності $a < b$ і $b < c$. Оскільки $a < b$ і $b < c$, то для будь-якого числа p за властивістю 3 справджаються нерівності $a + p < b + p$ і $b + p < c + p$, тобто $a + p < b + p < c + p$.

Отже, якщо до всіх частин правильної подвійної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну подвійну нерівність.

Міркуючи аналогічно, матимемо:

якщо $a < b < c$ і $p > 0$, то $ap < bp < cp$;

якщо $a < b < c$ і $p < 0$, то $ap > bp > cp$, тобто $cp < bp < ap$;

якщо a, b, c – додатні числа і $a < b < c$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

тобто $\frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Властивості числових нерівностей, які ми розглянули, можна використовувати для *оцінювання значення виразу*.

Приклад 2. Оцінити периметр квадрата зі стороною a см, якщо $3,2 < a < 3,9$.

Розв'язання. Оскільки периметр P квадрата обчислюють за формулою $P = 4a$, то всі частини нерівності $3,2 < a < 3,9$ помножимо на 4. Матимемо:

$3,2 \cdot 4 < 4a < 3,9 \cdot 4$, тобто $12,8 < P < 15,6$.

Отже, периметр квадрата більший за 12,8 см, але менший від 15,6 см.

Відповідь. $12,8 < P < 15,6$.

Приклад 3. Дано: $1 < x < 5$. Оцінити значення виразу:

1) $x + 2$; 2) $x - 3$; 3) $6x$; 4) $-x$;

5) $\frac{x}{15}$; 6) $-\frac{x}{10}$; 7) $3x - 1$; 8) $\frac{1}{x}$.

Розв'язання. Використаємо форму запису, запропоновану в завданні 5 прикладу 1.

$$\begin{array}{ll} 1) \quad 1 < x < 5 \mid +2 & 2) \quad 1 < x < 5 \mid -3 \\ 1 + 2 < x + 2 < 5 + 2; & 1 - 3 < x - 3 < 5 - 3; \\ 3 < x + 2 < 7; & -2 < x - 3 < 2; \end{array}$$

3) $1 < x < 5 \mid \cdot 6$
 $1 \cdot 6 < 6x < 5 \cdot 6;$
 $6 < 6x < 30;$

4) $1 < x < 5 \mid \cdot (-1)$
 $1 \cdot (-1) > x \cdot (-1) > 5 \cdot (-1);$
 $-5 < -x < -1;$

5) $1 < x < 5 \mid : 15$
 $\frac{1}{15} < \frac{x}{15} < \frac{5}{15};$
 $\frac{1}{15} < \frac{x}{15} < \frac{1}{3};$

6) $1 < x < 5 \mid : (-10)$
 $\frac{1}{-10} > \frac{x}{-10} > \frac{5}{-10};$
 $-\frac{1}{2} < -\frac{x}{10} < -\frac{1}{10};$

7) $1 < x < 5 \mid \cdot 3$
 $1 \cdot 3 < 3x < 5 \cdot 3 \mid -1$
 $3 - 1 < 3x - 1 < 15 - 1;$
 $2 < 3x - 1 < 14;$

8) $1 < x < 5$
 $\frac{1}{1} > \frac{1}{x} > \frac{1}{5};$
 $\frac{1}{5} < \frac{1}{x} < 1.$

Відповідь. 1) $3 < x + 2 < 7$; 2) $-2 < x - 3 < 2$;
 3) $6 < 6x < 30$; 4) $-5 < -x < -1$;
 5) $\frac{1}{15} < \frac{x}{15} < \frac{1}{3}$; 6) $-\frac{1}{2} < -\frac{x}{10} < -\frac{1}{10}$;
 7) $2 < 3x - 1 < 14$; 8) $\frac{1}{5} < \frac{1}{x} < 1$.



Сформулюйте й доведіть властивості числових нерівностей та наслідки з них. ● Наведіть приклади подвійних числових нерівностей. ● Сформулюйте властивості подвійних числових нерівностей.



Роз'яжіть задачі та виконайте вправи

1 39. Запишіть правильну нерівність, яку отримаємо, якщо:

- 1) до обох частин нерівності $-2 < 5$ додамо -5 ;
- 2) від обох частин нерівності $7 > 3$ віднімемо 1;
- 3) обидві частини нерівності $-2 < 9$ помножимо на 3;
- 4) обидві частини нерівності $-5 > -10$ помножимо на -2 ;
- 5) обидві частини нерівності $8 > 4$ поділимо на 2;
- 6) обидві частини нерівності $3 < 18$ поділимо на -3 .

- 40.** Запишіть правильну нерівність, яку отримаємо, якщо:
- 1) до обох частин нерівності $7 > 5$ додамо 8;
 - 2) від обох частин нерівності $0 < 8$ віднімемо 6;
 - 3) обидві частини нерівності $12 > 4$ помножимо на 3; на -1 ;
 - 4) обидві частини нерівності $15 < 18$ поділимо на 3; на -3 .

- 41.** (Усно). Порівняйте x і y , якщо:

1) $x < 5$, $5 < y$; 2) $x > 2$, $2 > y$.

- 42.** Покажіть на координатній прямій розташування точок, що відповідають числам a , b , c , d , e , якщо: $a > b$, $b > c$, $d < c$, $a < e$.

- 43.** Відомо, що $m > n$, $p < n$, $t > m$. Порівняйте:

1) p і m ; 2) p і t ; 3) n і t .

- 44.** Порівняйте число a з нулем, якщо:

1) $a > b$, $b \geqslant 1$; 2) $a < b$, $b < -2$.

- 45.** Порівняйте число x з нулем, якщо:

1) $x < y$, $y \leqslant -3$; 2) $x > y$, $y > 5$.

- 46.** Відомо, що $x > y$. Яким знаком ($>$ або $<$) треба замінити зірочку, щоб утворилася правильна нерівність:

1) $x + 2 * y + 2$;	2) $x - 3 * y - 3$;
3) $1,8x * 1,8y$;	4) $-x * -y$;
5) $-2,7x * -2,7y$;	6) $\frac{x}{3} * \frac{y}{3}$?

- 47.** Дано: $a < b$. Порівняйте:

1) $a - 7$ і $b - 7$;	2) $a + 3$ і $b + 3$;
3) $1,9a$ і $1,9b$;	4) $-a$ і $-b$;
5) $-0,8a$ і $-0,8b$;	6) $\frac{a}{5}$ і $\frac{b}{5}$.

- 48.** Відомо, що $1 < p < 2$. Оцініть значення виразу:

1) $p + 3$;	2) $p - 4$;	3) $12p$;
4) $\frac{p}{2}$;	5) $-p$;	6) $-3p$.

- 49.** Відомо, що $2 < m < 10$. Оцініть значення виразу:

1) $m + 1$;	2) $m - 2$;	3) $3m$;
4) $\frac{m}{5}$;	5) $-m$;	6) $-7m$.

50. Порівняйте числа:

1) $\frac{1}{a} \text{ i } \frac{1}{b}$, якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a < b$;

2) $\frac{1}{m} \text{ i } \frac{1}{n}$, якщо $m > n$, m і n – додатні числа.

51. Порівняйте числа:

1) $\frac{1}{x} \text{ i } \frac{1}{5}$, якщо $x > 5$;

2) $\frac{1}{b} \text{ i } \frac{1}{2}$, якщо $0 < b < 2$.

52. Порівняйте числа:

1) $\frac{1}{a} \text{ i } \frac{1}{9}$, якщо $0 < a < 9$;

2) $\frac{1}{c} \text{ i } \frac{1}{3}$, якщо $c > 3$.

53. Оцініть значення виразу $\frac{1}{a}$, якщо $10 < a < 20$.

54. Оцініть значення виразу $\frac{1}{x}$, якщо $5 < x < 10$.

55. Порівняйте число a з нулем, якщо:

- 1) $a + 2 > b + 2$ і $b \geq 0,3$; 2) $a - 3 < p - 3$ і $p < -0,7$;
 3) $7a > 7x$ і $x > 8$; 4) $-9a < -9b$ і $b \geq 13$.

56. Порівняйте число x з нулем, якщо:

- 1) $x - 5 < y - 5$ і $y < -1$; 2) $x + 7 > a + 7$ і $a \geq 1$;
 3) $2x > 2p$ і $p > 0,17$; 4) $-x > -t$ і $t \leq -2,5$.

57. Чи правильне твердження:

- 1) якщо $a > 5$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{5}$; 2) якщо $a < 5$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{5}$?

58. Відомо, що $x > y$. Порівняйте, якщо це можливо:

- 1) $x + 2$ і y ; 2) $y - 3$ і x ; 3) $-x + 1$ і $-y + 1$;
 4) $-x$ і $-y + 8$; 5) $-(x + 1)$ і $-y$; 6) $x - 1$ і $y + 2$.

59. Відомо, що $a < b$. Порівняйте, якщо це можливо:

- 1) $a - 2$ і b ; 2) $b + 3$ і a ; 3) $-a + 2$ і $-b + 2$;
 4) $-b - 7$ і $-a$; 5) $-a$ і $-(b + 3)$; 6) $a + 3$ і $b - 1$.

60. Відомо, що $1,2 < x < 1,5$. Оцініть значення виразу:

- 1) $2x + 0,7$; 2) $5 - x$; 3) $\frac{x}{3} - 1$; 4) $2 - 10x$.

61. Відомо, що $0,8 < a < 1,2$. Оцініть значення виразу:

- 1) $3a - 0,2$; 2) $4 - a$; 3) $\frac{a}{2} + 3$; 4) $10 - 5a$.

62. Оцініть значення виразу:

$$1) \frac{20}{a}, \text{ якщо } 2 < a < 5; \quad 2) \frac{1}{3a + 4}, \text{ якщо } -1 < a < 2.$$

63. Оцініть значення виразу:

$$1) \frac{100}{x}, \text{ якщо } 5 < x < 10; \quad 2) \frac{1}{2x - 3}, \text{ якщо } 2 < x < 4.$$

64. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює P см. Оцініть сторону a (у см) цього трикутника, якщо $12,6 < P < 15$.

65. Маса чотирьох однакових мішків із цукром дорівнює m кг. Оцініть масу p (у кг) одного такого мішка, якщо $192 < m < 204$.

 **66.** Порівняйте x і y , якщо:

$$1) x + 2 > m > y + 3; \quad 2) x - 2 < p < y - 3.$$

67. Порівняйте a і b , якщо:

$$1) a + 3 < c < b + 2; \quad 2) a - 7 > d > b - 5.$$

68. Відомо, що $1 < a < 2$. Оцініть значення виразу $\frac{12}{7 - 3a}$.

69. Відомо, що $2 < b < 5$. Оцініть значення виразу $\frac{27}{13 - 2b}$.

70. Дано $-2 < x < 2$. Оцініть значення виразу $\frac{6}{x}$.

 *Виправи для повторення*

 **71.** Виконайте дії:

$$1) \frac{x + 3y}{3x} - \frac{x + 2y}{2x}; \quad 2) \frac{1}{m(m + n)} + \frac{1}{n(m + n)};$$

$$3) \frac{3p^2}{p - 2} - 3p; \quad 4) \frac{a}{a - 5} + \frac{5}{5 - a}.$$

 **72.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x + 3}{x + 1} - \frac{x + 2}{1 - x} = \frac{x + 5}{x^2 - 1};$$

$$2) \frac{3}{x} - \frac{x}{2 - x} = \frac{x + 2}{x^2 - 2x}.$$

73. Доведіть, що значення виразу $8^{15} - 2^{40}$ кратне числу 31.

 74. Відомо, що x_1 і x_2 – корені рівняння $2x^2 - 3x - 10 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $x_1^2 + x_2^2$.

Життєва математика

75. Незалежна експертна лабораторія визначає рейтинг R побутових приладів на підставі коефіцієнта цінності, у яко-му враховують 0,01 від середньої ціни P , показники функ-ціональності F , якості Q і дизайну D . Кожен з показників оцінюють цілим числом від 0 до 4. Підсумковий рейтинг обчислюють за формулою $R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P$.

У таблиці подано середню ціну та оцінку кожного з по-казників для кількох моделей кухонних комбайнів.

Визначте моделі з найвищим і найнижчим рейтингами серед тих, які подано в таблиці.

Модель комбайна	Середня ціна, P (грн)	Функціональ-ність, F	Якість, Q	Дизайн, D
A	2800	3	2	4
Б	3000	3	3	3
В	3150	4	2	4
Г	3400	4	3	2

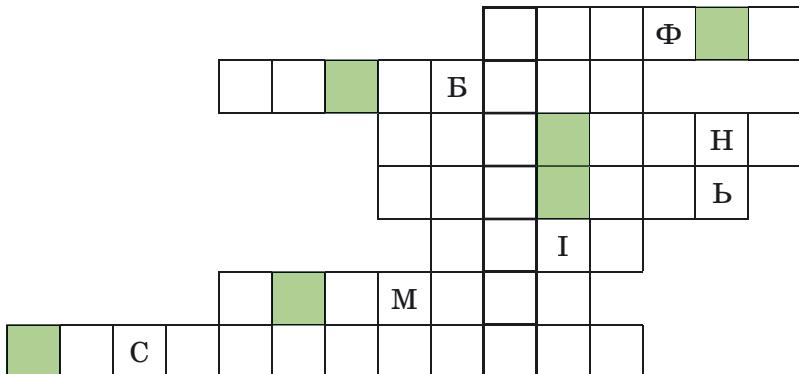
Додаткове завдання. Спробуйте розв'язати задачу, ви-користовуючи електронні таблиці, наприклад Excel.

Цікаві задачі для чинів нелегачів

76. 1) Пригадайте алгебраїчні поняття та впишіть їх у ряд-ки кросворда, деякі літери до якого вже внесено (див. с. 22).

Якщо назви понять запишете правильно, то у виді-леному стовпчику отримаєте назву гори – найвищої точки України, а з літер у зафарбованих клітинках можна буде скласти назву річки, що протікає по тери-торії України. Знайдіть ці назви.

2) Користуючись додатковими джерелами інформації, зокрема Інтернетом, знайдіть відомості про ці геогра-фічні об'єкти.



§3.

ПОЧЛЕННЕ ДОДАВАННЯ І МНОЖЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Продовжимо розглядати *властивості* нерівностей.

Нехай маємо дві правильні нерівності одного й того самого знака: $2 < 5$ і $3 < 7$. Додамо їх ліві частини, їх праві частини й між результатами запишемо той самий знак: $2 + 3 < 5 + 7$. Отримаємо правильну числову нерівність, адже, дійсно, $5 < 12$. Дію, яку ми виконали, називають *почленним додаванням нерівностей*. Зауважимо, що почленено додавати можна лише нерівності одного знака.



Властивість 5 (про почленне додавання нерівностей). Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Доведення. До обох частин нерівності $a < b$ додамо число c , а до обох частин нерівності $c < d$ – число b , отримаємо дві правильні нерівності: $a + c < b + c$ і $c + b < d + b$, тому $a + c < b + d$. Доведено.

Аналогічно можна довести, що коли $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.

Зауважимо, що властивість 5 справджується і для більш ніж двох нерівностей.

Приклад 1. Сторони деякого трикутника дорівнюють $\bullet a \text{ см}, b \text{ см} \text{ і } c \text{ см}$. Оцінити периметр трикутника P (у см), якщо $2,1 < a < 2,3; 2,5 < b < 2,7; 3,1 < c < 3,5$.

Розв'язання. Наведемо скорочений запис розв'язання:

⋮

$$\begin{array}{r}
 2,1 < a < 2,3 \\
 + \quad 2,5 < b < 2,7 \\
 + \quad 3,1 < c < 3,5 \\
 \hline
 7,7 < a + b + c < 8,5.
 \end{array}$$

Отже, $7,7 < P < 8,5$.

Відповідь. $7,7 < P < 8,5$.

Аналогічна до почленного додавання двох і більше нерівностей властивість справджується і для множення. Пochленно помноживши правильні нерівності $2 < 7$ і $3 < 4$, одержимо правильну нерівність $2 \cdot 3 < 7 \cdot 4$, адже $6 < 28$. Якщо ж почленно помножити правильні нерівності $-2 < -1$ і $2 < 8$, то одержимо $-4 < -8$ – неправильну нерівність. Зауважимо, що в першому випадку обидві частини нерівностей були додатними (2 і 7; 3 і 4), а у другому – деякі були від'ємними (-2 і -1).



Властивість 6 (про почленне множення нерівностей). Якщо $a < b$ і $c < d$, де a, b, c, d – додатні числа, то $ac < bd$.

Доведення. Помножимо обидві частини нерівності $a < b$ на додатне число c , а обидві частини нерівності $c < d$ – на додатне число b , одержимо дві правильні нерівності: $ac < bc$ і $bc < bd$. Тоді $ac < bd$ (за властивістю 2). Доведено.

Аналогічно можна довести, що коли $a > b$ і $c > d$, де a, b, c, d – додатні числа, то $ac > bd$.

Зауважимо, що властивість 6 справджується і для більш ніж двох нерівностей.



Наслідок. Якщо a і b – додатні числа і $a < b$, то $a^n < b^n$, де n – натуральне число.

Доведення. Перемноживши почленно n правильних нерівностей $a < b$, де a і b – додатні числа, отримаємо $a^n < b^n$.

За допомогою властивостей, які ми розглянули, можна оцінювати суму, різницю, добуток і частку чисел.

Приклад 2. Дано: $10 < a < 12$, $2 < b < 5$. Оцінити:

- 1) суму $a + b$; 2) різницю $a - b$;
- 3) добуток ab ; 4) частку $\frac{a}{b}$.

• Розв'язання. 1)
$$\begin{array}{r} + \\ 10 < a < 12 \\ + \\ 2 < b < 5 \\ \hline 12 < a + b < 17 \end{array}$$

- 2) Щоб оцінити різницю $a - b$, подамо її у вигляді суми $a - b = a + (-b)$ та оцінimo спочатку вираз $-b$. Оскільки $2 < b < 5$, то, помноживши обидві частини нерівності на число -1 і змінивши знаки нерівності на протилежні, матимемо $-2 > -b > -5$, тобто $-5 < -b < -2$. Отже,

$$\begin{array}{r} + \\ 10 < a < 12 \\ + \\ -5 < -b < -2 \\ \hline 5 < a - b < 10 \end{array}$$

• 3)
$$\begin{array}{r} \times \\ 10 < a < 12 \\ \times \\ 2 < b < 5 \\ \hline 20 < ab < 60 \end{array}$$

- 4) Щоб оцінити частку $\frac{a}{b}$, подамо її у вигляді добутку:

$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$. Оцінimo вираз $\frac{1}{b}$. Якщо $2 < b < 5$, то $\frac{1}{2} > \frac{1}{b} > \frac{1}{5}$, тобто $\frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$. Отже,

$$\begin{array}{r} \times \\ 10 < a < 12 \\ \times \\ \frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2} \\ \hline 2 < \frac{a}{b} < 6 \end{array}$$

- Відповідь. 1) $12 < a + b < 17$; 2) $5 < a - b < 10$;
3) $20 < ab < 60$; 4) $2 < \frac{a}{b} < 6$.

За допомогою властивостей, які ми розглянули, можна також доводити нерівності.

Приклад 3. Довести, що $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geqslant 4$, якщо $x > 0$, $y > 0$.

• Розв'язання. Застосуємо до кожного множника лівої частини нерівності нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним (нерівність Коші). Матимемо:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \text{i} \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}}.$$

Обидві частини кожної із цих нерівностей за властивістю 4 помножимо на 2, отримаємо:

$$x+y \geq 2\sqrt{xy} \quad \text{i} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}.$$

Перемножимо ці нерівності почленно:

$$\begin{array}{c} x+y \geq 2\sqrt{xy} \\ \times \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}} \\ \hline (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4\sqrt{xy} \cdot \sqrt{\frac{1}{xy}}. \end{array}$$

Отже, $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$, що й треба було довести.



Що мають на увазі під почленним додаванням нерівностей? Сформулюйте їй доведіть властивість про почленне додавання нерівностей. Що мають на увазі під почленним множенням нерівностей? Сформулюйте їй доведіть властивість про почленне множення нерівностей. Сформулюйте наслідок з властивості про почленне множення нерівностей.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 77. Додайте почленно нерівності:

$$1) 3 < 9 \text{ i } 10 < 14; \quad 2) -2 > -5 \text{ i } 3 > 0.$$

2 78. Додайте почленно нерівності:

$$1) 8 > 3 \text{ i } 10 > 7; \quad 2) -3 < -1 \text{ i } -5 < 1.$$

3 79. Перемножте почленно нерівності:

$$1) 3 > 1 \text{ i } 5 > 2; \quad 2) 7 < 10 \text{ i } 2 < 5.$$

4 80. Перемножте почленно нерівності:

$$1) 5 < 7 \text{ i } 1 < 10; \quad 2) 7 > 3 \text{ i } 5 > 1.$$

81. (Усно). Чи отримаємо правильну нерівність, перемноживши нерівності почленно:

1) $-2 < -1$ і $5 < 17$; 2) $0 > -3$ і $1 > -5$?

82. Оцініть значення виразу $a + b$, якщо:

1) $-3 < a < 5$ і $0 < b < 7$; 2) $2 < a < 7$ і $-10 < b < -8$.

83. Оцініть значення виразу $m + n$, якщо:

1) $3 < m < 7$ і $0 < n < 2$; 2) $-3 < m < -2$ і $-5 < n < -1$.

84. Оцініть значення виразу xy , якщо:

1) $1 < x < 2$ і $5 < y < 10$; 2) $3 < x < 4,5$ і $1 < y < 10$.

85. Оцініть значення виразу cd , якщо:

1) $2 < c < 10$ і $1,5 < d < 2,5$;

2) $\frac{1}{3} < c < 1$ і $3 < d < 8$.

86. Відомо, що $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$; $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$. Оцініть:

1) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; 2) $\sqrt{10}$.

87. Оцініть значення виразу $2a + b$, де $-1 < a < 4$ і $2 < b < 3$.

88. Оцініть значення виразу $3x + y$, де $2 < x < 3$ і $1 < y < 7$.

89. Оцініть значення виразу p^2 , якщо $2 < p < 3$.

90. Оцініть значення виразу m^2 , якщо $1 < m < 5$.

91. Відомо, що $x > 3$, $y > 4$. Чи правильне твердження:

1) $x + y > 7$; 2) $x + y > 6$; 3) $x + y > 8$;

4) $xy > 12$; 5) $xy > 13$; 6) $xy > 10$?

92. Відомо, що $x < 3$, $y < 4$. Чи можна стверджувати, що $xy < 12$?

93. Відомо, що $-3 < x < 4$, $1 < y < 4$. Оцініть значення виразу:

1) $x - y$; 2) $3x - y$; 3) $2y - x$; 4) $2x - 3y$.

94. Відомо, що $-2 < a < 0$, $3 < b < 5$. Оцініть значення виразу:

1) $a - b$; 2) $2a - b$; 3) $3b - a$; 4) $4a - 5b$.

95. Дано: $5 < a < 10$, $1 < b < 2$. Оцініть значення виразу:

1) $\frac{a}{b}$; 2) $\frac{4b}{3a}$.

96. Дано: $2 < x < 4$, $1 < y < 5$. Оцініть значення виразу:

1) $\frac{x}{y}$; 2) $\frac{5y}{2x}$.

97. Оцініть периметр P прямокутника зі сторонами a см і b см, якщо $2,3 < a < 2,5$ і $3,1 < b < 3,7$.

98. Оцініть периметр P рівнобедреного трикутника з основою x см і бічною стороною y см, якщо $10 < x < 12$ і $9 < y < 11$.

99. Оцініть міру кута A трикутника ABC , якщо $50^\circ < \angle B < 52^\circ$, $60^\circ < \angle C < 65^\circ$.

100. Дано: $a > 4$, $b < -3$. Доведіть, що:

- 1) $a - b > 7$;
- 2) $2a - b > 11$;
- 3) $5b - a < -19$;
- 4) $6b - 11a < -60$.

101. Дано: $m > 6$, $n < -1$. Доведіть, що:

- 1) $m - n > 7$;
- 2) $3m - n > 13$;
- 3) $2n - m < -8$;
- 4) $4n - 5m < -34$.

102. Доведіть нерівність:

- 1) $(x^3 + y)(x + y^3) \geq 4x^2y^2$, якщо $x \geq 0$, $y \geq 0$;
- 2) $(m + 6)(n + 3)(p + 2) \geq 48\sqrt{mnp}$, якщо $m \geq 0$, $n \geq 0$, $p \geq 0$;
- 3) $(a + 1)(b + 1)(c + 1) > 32$, якщо $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $abc = 16$.

103. Доведіть нерівність:

- 1) $(mn + 1)(m + n) \geq 4mn$, якщо $m \geq 0$, $n \geq 0$;
- 2) $(a + 2c)(b + 2a)(c + 2b) \geq 16\sqrt{2}abc$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$;
- 3) $(x + 3)(y + 3)(z + 3) > 72$, якщо $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ і $xyz = 3$.

104. Доведіть нерівність:

- 1) $x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} \geq 4$, якщо $x > 0$, $y > 0$;
- 2) $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)\left(1 + y + \frac{1}{y}\right) \geq 9$, якщо $x > 0$, $y > 0$.



Вправи для повторення

105. Виконайте дії:

- 1) $\frac{4c^2 - 4c + 1}{5c + 5} \cdot \frac{c + 1}{2c - 1}$;
- 2) $\frac{p - 2}{m^2 + 2m} : \frac{p - 2}{5m + 10}$.

3 106. Після того як змішали 6-відсотковий і 3-відсотковий розчини солі, отримали 300 г 4-відсоткового розчину. По скільки грамів кожного розчину змішали?

107. Обчисліть: $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$.

4 108. Побудуйте графік функції $y = \frac{12 - 6x}{x^2 - 2x}$.



Життєва математика

109. 1) Петро Петрович придбав американський позашляховик, спідометр якого показує швидкість у милях за годину. Американська миля дорівнює 1609 м. Знайдіть швидкість позашляховика в кілометрах за годину в момент, коли спідометр показує 60 миль за годину. Відповідь округліть до десятих км/год.

2) Щоб спростити обчислення, Петро Петрович для визначення швидкості в км/год вирішив множити показники спідометра на число 1,6. Знайдіть абсолютну похибку (у км/год) такого обчислення, якщо спідометр показує 70 миль за годину.



Підготуйтесь до вивчення нового матеріалу

110. Чи є число 2 розв'язком рівняння:

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| 1) $2x - 1 = 5;$ | 2) $x^2 + x = 6;$ |
| 3) $3x - 7 = -1;$ | 4) $x^2 + x + 9 = 2x + 7;$ |
| 5) $x^3 + x^2 + x = 14;$ | 6) $\frac{x + 8}{x - 1} = 10?$ |

111. Чи правильна нерівність $25 - x > 20$, якщо $x = -5; 3; 5; 11$?

112. Доожної нерівності доберіть два таких значення x , щоб для кожного з них вона була правильною:

- | | | |
|-------------------------|----------------------|-----------------|
| 1) $x \geqslant 5;$ | 2) $x < -2;$ | 3) $x + 7 > 9;$ |
| 4) $x - 3 \leqslant 0;$ | 5) $2x \geqslant 9;$ | 6) $-3x < -12.$ |

113. Які із запропонованих виразів є додатними для всіх значень змінної, а які – невід'ємними:

- | | |
|-----------------|----------------------|
| 1) $x^2;$ | 2) $(x - 3)^2 + 1;$ |
| 3) $(x + 5)^2;$ | 4) $(x + 7)^2 + 11?$ |



Цікаві задачі для учнів нелегачіх

114. (Українська математична олімпіада, 1962 р.). Знайдіть значення виразу $a^3 + b^3 + 3(a^3b + ab^3) + 6(a^3b^2 + a^2b^3)$, де a і b – корені рівняння $x^2 - x + q = 0$.

§ 4.

НЕРІВНОСТІ ЗІ ЗМІННИМИ. РОЗВ'ЯЗОК НЕРІВНОСТІ

Розглянемо нерівність $2x + 1 > 11$. Це нерівність зі змінною. При одних значеннях змінної x вона перетворюється на правильну числову нерівність, а при інших – на неправильну. Справді, якщо замість x підставити, наприклад, число 8, то матимемо нерівність $2 \cdot 8 + 1 > 11$, що є правильною, якщо ж підставити число 4, то матимемо нерівність $2 \cdot 4 + 1 > 11$, що є неправильною. У такому випадку кажуть, що число 8 є *розв'язком нерівності* $2x + 1 > 11$ (або число 8 *задовільняє нерівність* $2x + 1 > 11$), а число 4 – не є розв'язком цієї нерівності (або число 4 *не задовільняє нерівність* $2x + 1 > 11$).

Також розв'язками нерівності $2x + 1 > 11$ є, наприклад, числа 34; 5,5; $\sqrt{90}$; $7\frac{1}{8}$ тощо.



Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її у правильну числову нерівність.

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Приклад 1. Розв'язати нерівності:

$$1) \sqrt{x} > 0; \quad 2) \frac{1}{x^2 + 1} \leqslant 0.$$

Розв'язання. 1) \sqrt{x} набуває невід'ємних значень для всіх $x \geqslant 0$, причому $\sqrt{x} = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = 0$.

Отже, розв'язком нерівності є будь-яке додатне число.

2) Оскільки $x^2 \geqslant 0$ для будь-якого значення x , то $x^2 + 1 > 0$

для будь-якого x . Тому значення виразу $\frac{1}{x^2 + 1}$ також

є додатним для будь-якого x . Отже, нерівність $\frac{1}{x^2 + 1} \leqslant 0$