А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

АЛГЕБРА
І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Харків
«Гімназія»
2019

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]
М52

Мерзляк А. Г.

М52 Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2019. — 352 с. : іл.

ISBN 978-966-474-000-0.

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]

ISBN 978-966-474-000-0

ВІД АВТОРІВ

Любі одинадцятикласники та одинадцятикласниці!

У цьому навчальному році ви закінчуєте школу, і ми сподіваємося, що отримані знання стануть для вас надійним підґрунтям в опануванні майбутньою професією. Маємо надію, що в цьому вам допоможе підручник, який ви тримаєте в руках. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Текст підручника поділено на п'ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал підручника, особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано завдання для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі в тестовій формі з рубрики «Перевір себе».

Крім навчального матеріалу, у підручнику ви зможете знайти оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків.

Бажаємо успіхів!

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° — завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ — завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ — завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} — задачі для математичних гуртків і факультативів;

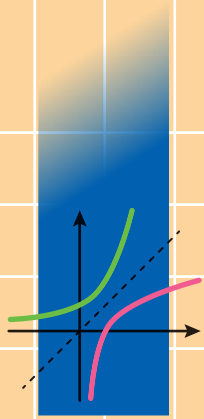
◄ — закінчення доведення теореми, розв’язання задачі;

ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв’язування інших задач;


рубрика «Коли зроблено уроки»;

1.5. зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи;

1.6. синім кольором позначено номери задач, що рекомендовано для розв’язування усно.



§ 1. Показникова та логарифмічна функції

1. **Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція**
2. **Показникові рівняння**
3. **Показникові нерівності**
4. **Логарифм і його властивості**
5. **Логарифмічна функція та її властивості**
6. **Логарифмічні рівняння**
7. **Логарифмічні нерівності**
8. **Похідні показникової та логарифмічної функцій**

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з поняттям степеня з довільним дійсним показником.
- Ви дізнаєтесь, які функції називають показниковою та логарифмічною, вивчите властивості цих функцій, навчитеся розв’язувати показникові рівняння і нерівності.

1. Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція

У 10 класі ви ознайомилися з поняттям степеня додатного числа з раціональним показником. Тепер ми з'ясуємо, що являє собою степінь додатного числа з дійсним показником.

Строге означення степеня з дійсним показником та доведення його властивостей виходить за межі навчальної програми. Текст цього пункту містить лише загальні пояснення того, як можна провести необхідні обґрунтування.

Почнемо з розгляду окремого випадку. З'ясуємо, що розуміють під степенем числа 2 з показником π.

Ірраціональне число π можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу:

$$\pi = 3{,}1415\ldots\ .$$

Розглянемо послідовність раціональних чисел

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots\ . \qquad (1)$$

Зрозуміло, що ця послідовність збігається до числа π.

Відповідно до послідовності (1) побудуємо послідовність степенів з раціональними показниками:

$$2^3,\ 2^{3,1},\ 2^{3,14},\ 2^{3,141},\ 2^{3,1415},\ \ldots\ . \qquad (2)$$

Можна показати, що члени послідовності (2) зі збільшенням номера прямують до деякого додатного числа. Це число називають степенем числа 2 з показником π і позначають 2^π.

Аналогічно можна діяти в загальному випадку, означаючи зміст виразу b^α, де $b > 0$, α — довільне дійсне число. Для числа α будують збіжну до нього послідовність раціональних чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots$. Далі розглядають послідовність $b^{\alpha_1},\ b^{\alpha_2},\ b^{\alpha_3},\ \ldots$ степенів з раціональними показниками (нагадаємо, що степінь додатного числа з раціональним показником є визначеним). Можна довести, що ця послідовність збігається до додатного числа c, яке не залежить від вибору збіжної до α послідовності раціональних чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots$. Число c називають степенем додатного числа b з дійсним показником α і позначають b^α.

Якщо основа b дорівнює одиниці, то $1^\alpha = 1$ для всіх дійсних α.

Якщо основа b дорівнює нулю, то степінь 0^α означають тільки для $\alpha > 0$ і вважають, що $0^\alpha = 0$. Наприклад, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^\pi = 0$, а вираз $0^{-\sqrt{3}}$ не має змісту.

При $b < 0$ вираз b^α, де α — ірраціональне число, не має змісту.

Степінь з дійсним показником має ті самі властивості, що й степінь з раціональним показником.

Зокрема, для $x > 0$, $y > 0$ та будь-яких дійсних α і β справедливі такі рівності:

1) $x^{\alpha}x^{\beta} = x^{\alpha+\beta}$;

2) $x^{\alpha} : x^{\beta} = x^{\alpha-\beta}$;

3) $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$;

4) $(xy)^{\alpha} = x^{\alpha}y^{\alpha}$;

5) $\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha} = \frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}}$.

Доведемо, наприклад, властивість 1.

Нехай α і β — дійсні числа, причому $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$, де (α_n) і (β_n) — послідовності раціональних чисел. Маємо:

$$\alpha+\beta = \lim_{n\to\infty}\alpha_n + \lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n).$$

Для додатного числа x розглянемо три послідовності: (x^{α_n}), (x^{β_n}) і $(x^{\alpha_n}\cdot x^{\beta_n})$. Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}x^{\alpha_n} = x^{\alpha}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{\beta_n} = x^{\beta}$.

Оскільки для раціональних показників α_n і β_n властивість 1 має місце (ми дізналися про це, вивчаючи властивості степеня з раціональним показником), то $x^{\alpha_n}\cdot x^{\beta_n} = x^{\alpha_n+\beta_n}$.

Послідовність раціональних чисел $\alpha_1+\beta_1$, $\alpha_2+\beta_2$, $\alpha_3+\beta_3$, ... збігається до числа $\alpha+\beta$. Тому можна записати, що $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = x^{\alpha+\beta}$.

$$x^{\alpha}\cdot x^{\beta} = \lim_{n\to\infty}x^{\alpha_n}\cdot\lim_{n\to\infty}x^{\beta_n} = \lim_{n\to\infty}(x^{\alpha_n}\cdot x^{\beta_n}) = \lim_{n\to\infty}x^{\alpha_n+\beta_n} = x^{\alpha+\beta}.$$

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $\dfrac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}} = \frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}+1\right)a^{\sqrt{7}}}{\left(a^{3\sqrt{7}}+1\right)a^{\sqrt{7}}} = \frac{a^{3\sqrt{7}}+1}{a^{3\sqrt{7}}+1} = 1. \blacktriangleleft$$

Виберемо деяке додатне число a, відмінне від 1. Кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність число a^x. Тим самим задамо функцію $f(x) = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, з областю визначення $\mathbb{R}$. Цю функцію називають **показниковою функцією**.

З'ясуємо деякі властивості показникової функції.

При $a > 0$ і будь-якому x виконується нерівність $a^x > 0$, тому область значень показникової функції складається тільки з додатних чисел.

Можна показати, що для даного числа a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, і для будь-якого додатного числа b існує таке число x, що виконується рівність $a^x = b$.

- Сказане означає, що *областю значень показникової функції є множина* $(0; +\infty)$.
- *Показникова функція не має нулів, і проміжок* $(-\infty; +\infty)$ *є її проміжком знакосталості.*
- *Показникова функція є неперервною.*
- Покажемо, що *при* $a > 1$ *показникова функція є зростаючою.* Для цього скористаємося лемою.

Лема. ***Якщо*** $a > 1$ ***і*** $x > 0$, ***то*** $a^x > 1$; ***якщо*** $0 < a < 1$ ***і*** $x > 0$, ***то*** $0 < a^x < 1$.

Наприклад, $2^{\frac{1}{\pi}} > 1$, $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < 1$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_2 > x_1$, і функцію $f(x) = a^x$, де $a > 1$.

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Тоді за лемою маємо: $a^{x_2 - x_1} > 1$, тобто $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1$. Оскільки $a^{x_1} > 0$, то $a^{x_2} > a^{x_1}$. Звідси $f(x_2) > f(x_1)$.

Отже, ми показали, що з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$. Це означає, що функція f є зростаючою.

- Аналогічно можна показати, що *при* $0 < a < 1$ *показникова функція є спадною.*
- Оскільки показникова функція є або зростаючою (при $a > 1$), або спадною (при $0 < a < 1$), то вона *не має точок екстремуму.*
- *Показникова функція є диференційовною.* Детальніше про похідну показникової функції ви дізнаєтеся в п. 8.

На рисунках 1.1 і 1.2 схематично зображено графік показникової функції для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ відповідно.

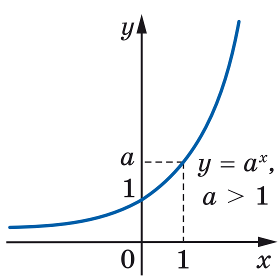


Рис. 1.1

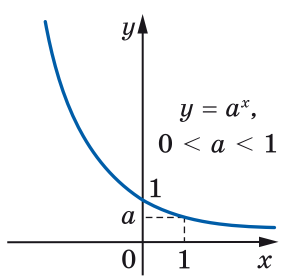


Рис. 1.2

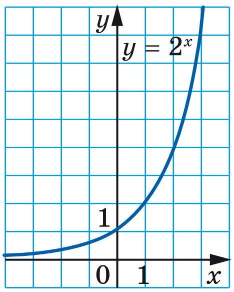


Рис. 1.3

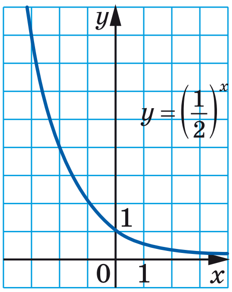


Рис. 1.4

Зокрема, на рисунках 1.3 і 1.4 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Зауважимо, що при $a > 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$. Аналогічно при $0 < a < 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$.

Показникова функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі та в діяльності людини.

Наприклад, біологам відомо, що колонія бактерій у певних умовах за рівні проміжки часу збільшує свою масу в одну й ту саму кількість разів.

Це означає, що коли, наприклад, у момент часу $t = 0$ маса дорівнювала 1, а в момент часу $t = 1$ маса дорівнювала a, то в моменти часу $t = 2$, $t = 3$, ..., $t = n$, ... маса дорівнюватиме відповідно a^2, a^3, ..., a^n, ... Тому природно вважати, що в будь-який момент часу t маса дорівнюватиме a^t. Можна перевірити (зробіть це самостійно), що значення функції $f(t) = a^t$ збільшується в одну й ту саму кількість разів за рівні проміжки часу.

Таким чином, розглянутий процес описують за допомогою показникової функції $f(t) = a^t$.

З фізики відомо, що під час радіоактивного розпаду маса радіоактивної речовини за рівні проміжки часу зменшується в одну й ту саму кількість разів.

Якщо покласти гроші в банк під певний процент, то кожного року кількість грошей на рахунку буде збільшуватися в одну й ту саму кількість разів.

Отже, показникова функція описує і ці процеси.

У таблиці наведено властивості функції $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$(0;\ +\infty)$
Нулі функції	–
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на $\mathbb{R}$
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Якщо $a > 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$; якщо $0 < a < 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найменше і найбільше значення функції $f(x) = 3^x$ на проміжку $[-4;\ 3]$.

Розв'язання. Оскільки функція f зростає на проміжку $[-4;\ 3]$, то найменшого значення вона набуває при $x = -4$, а найбільшого — при $x = 3$. Отже,

$$\min_{[-4;3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81},$$

$$\max_{[-4;3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Відповідь: $\frac{1}{81}$, 27. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2}-1\right)^{|x|} = \sin^2 x + 1$.

Розв'язання. Оскільки $0 < \sqrt{2}-1 < 1$, а $|x| \geqslant 0$, то $\left(\sqrt{2}-1\right)^{|x|} \leqslant$ $\leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^0 = 1$. Водночас $\sin^2 x + 1 \geqslant 1$. Таким чином, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \left(\sqrt{2}-1\right)^{|x|} = 1, \\ \sin^2 x + 1 = 1. \end{cases}$$

Звідси $x = 0$.

Відповідь: 0. ◄

1. Сформулюйте властивості степеня з дійсним показником.
2. Яких значень набуває вираз x^{α}, де $\alpha > 0$, при $x > 1$? при $0 < x < 1$?
3. Яку функцію називають показниковою?
4. Яка область визначення показникової функції?
5. Яка область значень показникової функції?
6. Скільки нулів має показникова функція?
7. При яких значеннях a показникова функція $y = a^x$ є зростаючою? спадною?
8. Чи має показникова функція точки екстремуму?
9. Який вигляд має графік функції $y = a^x$ при $a > 1$? при $0 < a < 1$?

ВПРАВИ

1.1.° Обчисліть значення виразу:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$;
3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$;
2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;
4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

1.2.° Знайдіть значення виразу:

1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$;
2) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$;
3) $\left(\left(\sqrt[5]{10}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

1.3.° Доведіть, що:

1) $\frac{5^{\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{2}}} = 5^{\sqrt{2}}$;
3) $\frac{12^{\sqrt{48}} \cdot 2^{4\sqrt{12}}}{4^{\sqrt{108}} \cdot 6^{\sqrt{27}}} = 6^{\sqrt{3}}$.
2) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} = \left(16^{\sqrt{3}}\right)^{-2}$;

1.4.° Порівняйте із числом 1 степінь:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$;
3) $0{,}6^{2\sqrt{5}}$;
5) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\pi}$;
2) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\pi}$;
4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$;
6) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{6}}$.

1.5.° Які з даних чисел більші за 1, а які менші від 1?

1) $1{,}8^{\sqrt{1{,}8}}$;
2) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{10}}$;
3) $7^{-\sqrt{2}}$;
4) $0{,}3^{-\pi}$.

1.6.° Яка з даних функцій є показниковою:

1) $y = x^6$;
2) $y = \sqrt[6]{x}$;
3) $y = 6^x$;
4) $y = 6$?

1.7.° Ґрунтуючись на якій властивості показникової функції можна стверджувати, що:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

1.8.° Укажіть, які з даних функцій є зростаючими, а які — спадними:

1) $y = 10^x$; 3) $y = 2^{-x}$; 5) $y = 2^x \cdot 3^x$;

2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; 4) $y = y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$.

1.9.° Побудуйте графік функції $y = 3^x$. Як змінюється значення функції, коли x зростає від -1 до 3 включно?

1.10.° Побудуйте графік функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Як змінюється значення функції, коли x зростає від -2 до 2 включно?

1.11.° Порівняйте із числом 1 додатне число a, якщо:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$.

1.12.° Порівняйте числа m і n, якщо:

1) $0,8^m < 0,8^n$; 2) $3,2^m > 3,2^n$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$; 4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

1.13.• Спростіть вираз:

1) $\left(a^{\sqrt{5}} + 2\right)\left(a^{\sqrt{5}} - 2\right) - \left(a^{\sqrt{5}} + 3\right)^2$; 3) $\frac{a^{2\sqrt{3}} - b^{2\sqrt{2}}}{\left(a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}}\right)^2} + 1$;

2) $\frac{a^{2\sqrt{7}} - a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}} - a^{3\sqrt{7}}}$; 4) $\frac{a^{\sqrt[3]{24}} - 1}{a^{\sqrt[3]{3}} - 1} - \frac{a^{\sqrt[3]{81}} + 1}{a^{\sqrt[3]{3}} + 1}$.

1.14.• Спростіть вираз:

1) $\frac{\left(a^{2\sqrt{6}} - 1\right)\left(a^{\sqrt{6}} + a^{2\sqrt{6}} + a^{3\sqrt{6}}\right)}{a^{4\sqrt{6}} - a^{\sqrt{6}}}$; 2) $\left((a^{\pi} + b^{\pi})^2 - (a^{\pi} - b^{\pi})^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$.

1.15.• Чи є правильним твердження:

1) найбільше значення функції $y = 0,2^x$ на проміжку $[-1; 2]$ дорівнює 5;
2) областю визначення функції $y = 4 - 7^x$ є множина дійсних чисел;
3) областю значень функції $y = 6^x + 5$ є проміжок $[5; +\infty)$;
4) найменше значення функції $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ на проміжку $[-2; 2]$ дорівнює 16?

1.16.$^{\bullet}$ Знайдіть область значень функції:

1) $y = -9^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 1$; 3) $y = 7^x - 4$; 4) $y = 6^{|x|}$.

1.17.$^{\bullet}$ Знайдіть найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ на проміжку $[-2; 3]$.

1.18.$^{\bullet}$ На якому проміжку найбільше значення функції $y = 2^x$ дорівнює 16, а найменше — $\frac{1}{4}$?

1.19.$^{\bullet}$ На якому проміжку найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ дорівнює 27, а найменше — $\frac{1}{9}$?

1.20.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x > -1$; 2) $2^{\sqrt{x}} > -2$.

1.21.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

1.22.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = 2^x - 1$; 3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$; 5) $y = -2^x$;

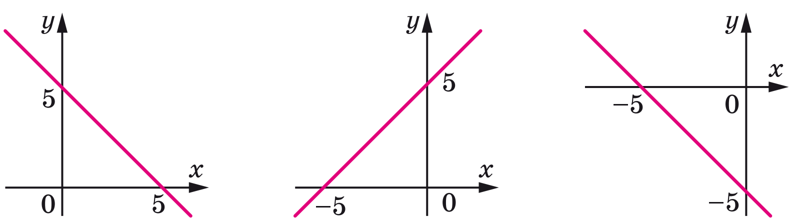
2) $y = 2^{x-1}$; 4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$; 6) $y = 5 - 2^x$.

1.23.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = 3^x + 1$; 3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$; 5) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$;

2) $y = 3^{x+1}$; 4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$; 6) $y = -3^x - 1$.

1.24.$^{\bullet}$ Графік якої з функцій, зображених на рисунку 1.5, перетинає графік функції $y = 5^x$ більше ніж в одній точці?



а *б* *в*

Рис. 1.5

1.25.$^{\bullet}$ На рисунку 1.6 укажіть графік функції $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$.

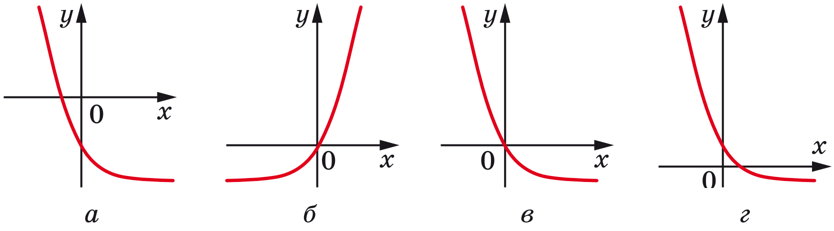


Рис. 1.6

1.26.$^{\bullet}$ Установіть графічно кількість коренів рівняння:
1) $2^x = x$; 2) $2^x = x^2$; 3) $2^x = \sin x$; 4) $2^{-x} = 2 - x^2$.

1.27.$^{\bullet}$ Установіть графічно кількість коренів рівняння:
1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

1.28.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:
1) $y = 2^{|x|}$; 3) $y = |2^x - 1|$;
2) $y = 2^{|x|} + 1$; 4) $y = \left|\frac{1}{2^x} - 1\right|$.

1.29.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:
1) $y = \frac{1}{3^{|x|}}$; 2) $y = 3^{|x|} - 1$; 3) $y = |3^x - 1|$.

1.30.$^{\bullet\bullet}$ Порівняйте $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{-5,2}$ і $\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^{5,6}$.

1.31.$^{\bullet\bullet}$ Порівняйте $\left(2 + \sqrt{3}\right)^{-\pi}$ і $\left(2 - \sqrt{3}\right)^{\pi}$.

1.32.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

1.33.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:
1) $y = \left|2^{-|x|} - 1\right|$; 2) $y = \frac{2^{|x|} - 1}{|2^x - 1|}$.

1.34.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:
1) $y = \left|1 - 3^{|x|}\right|$; 2) $y = \frac{|1 - 3^{-x}|}{3^{|x|} - 1}$.

1.35.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть область значень функції $f(x) = 2^{(\sin x + \cos x)^2}$.

1.36.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть область значень функції $f(x) = 3^{|\sin x \cos x|}$.

1.37.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{\cos x} = x^2 + 2$; 2) $2^{\sqrt{x}} = \cos x$.

1.38.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = x^2 + 1$; 2) $2^{|x|} = \cos x$.

1.39.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2} \geqslant \sin x$; 2) $2^{-x^2} \geqslant |\sin x| + 1$; 3) $2^{\sqrt{x}} \geqslant 1 - x^2$.

1.40.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2} > \cos x$; 2) $2^{-x^2} \geqslant x^2 + 1$.

1.41.•• Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$; 2) $y = (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x$.

1.42.•• Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \frac{2^x - 3^x}{2^x + 3^x}$; 2) $y = (\sqrt{2} + 1)^x - (\sqrt{2} - 1)^x$.

1.43.* Знайдіть область значень функції $y = \frac{2^x - 1}{2^x - 4}$.

1.44.* Знайдіть область значень функції $y = \frac{3^x}{3^x - 9}$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

1.45. Подайте числа 1; 4; 8; 16; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{32}$ у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

1.46. Подайте числа 1; 9; 81; $\frac{1}{27}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt[5]{243}$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

1.47. Спростіть вираз:

1) $7^{x+1} + 7^x$; 3) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1}$;

2) $2^{x+1} + 2^{x-4}$; 4) $9^{x+1} + 3^{2x+1}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.48. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 2x - 8}$; 2) $f(x) = \sqrt{16x - x^3}$.

1.49. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = 12 - 4x - x^2$;
2) $f(x) = 3 + \sqrt[4]{x-1}$;
3) $f(x) = \cos x \operatorname{tg} x$.

1.50. Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = \dfrac{x-1}{2x}$;
2) $y = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{4 - x^2}$.

2. Показникові рівняння

Розглянемо рівняння $2^x = 8$,

$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$

$$0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x^2}.$$

У цих рівняннях змінна міститься тільки в показнику степеня. Наведені рівняння є прикладами **показникових рівнянь.**

Теорема 2.1. ***При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.***

Доведення. Очевидно, що коли $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Доведемо, що з рівності $a^{x_1} = a^{x_2}$ випливає рівність $x_1 = x_2$. Припустимо, що $x_1 \neq x_2$, тобто $x_1 < x_2$ або $x_1 > x_2$. Нехай, наприклад, $x_1 < x_2$.

Розглянемо показникову функцію $y = a^x$. Вона є або зростаючою, або спадною. Тоді з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $a^{x_1} < a^{x_2}$ (при $a > 1$) або $a^{x_1} > a^{x_2}$ (при $0 < a < 1$). Проте за умовою виконується рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$. Отримали суперечність.

Аналогічно розглядають випадок, коли $x_1 > x_2$. ◄

Наслідок. ***Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння***

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \tag{1}$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x). \tag{2}$$

Доведення. Нехай x_1 — корінь рівняння (1), тобто $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$. Тоді за теоремою 2.1 отримуємо, що $f(x_1) = g(x_1)$. Отже, x_1 — корінь рівняння (2).

Нехай x_2 — корінь рівняння (2), тобто $f(x_2) = g(x_2)$. Звідси $a^{f(x_2)} = a^{g(x_2)}$.

Ми показали, що кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2) і навпаки, кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1). Таким чином, рівняння (1) і (2) рівносильні. ◄

Розглянемо приклади розв'язування показникових рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $(0{,}125)^x = 128$.

Розв'язання. Подамо кожну із частин рівняння у вигляді степеня з основою 2. Маємо: $0{,}125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ і $128 = 2^7$. Запишемо:

$$(2^{-3})^x = 2^7;\ 2^{-3x} = 2^7.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$-3x = 7.$$

Звідси $x = -\frac{7}{3}$.

Відповідь: $-\frac{7}{3}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01 \cdot (10^{x-1})^3$.

Розв'язання. Скориставшись властивостями степеня, подамо кожну із частин рівняння у вигляді степеня з основою 10. Маємо:

$$(2 \cdot 5)^{x^2-3} = 10^{-2} \cdot 10^{3x-3};$$

$$10^{x^2-3} = 10^{3x-5}.$$

Переходимо до рівносильного рівняння:

$$x^2 - 3 = 3x - 5.$$

Звідси $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Відповідь: 1; 2. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння

$$2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280.$$

Розв'язання. Маємо: $2^{12x-1} - 2^{12x-2} + 2^{12x-3} - 2^{12x-4} = 1280;$

$$2^{12x-4}(2^3 - 2^2 + 2^1 - 1) = 1280;\ 2^{12x-4} \cdot 5 = 1280;$$

$$2^{12x-4} = 256;\ \ 2^{12x-4} = 2^8;$$

$$12x - 4 = 8;\ x = 1.$$

Відповідь: 1. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $2 \cdot 3^{x+2} - 3^{x+1} = 5^{x+1} + 4 \cdot 5^x$.

Розв'язання. Маємо: $3^x(2 \cdot 3^2 - 3) = 5^x(5 + 4);\quad 3^x \cdot 15 = 5^x \cdot 9;$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{9}{15};\ \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{3}{5};\ x = 1.$$

Відповідь: 1. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$, то дане рівняння зручно розв'язувати методом заміни змінної.

Нехай $5^x = t$. Тоді задане рівняння можна переписати так:

$$t^2 + 4t - 5 = 0.$$

Звідси $t = 1$ або $t = -5$.

Якщо $t = 1$, то $5^x = 1$. Звідси $5^x = 5^0$; $x = 0$.

Якщо $t = -5$, то $5^x = -5$. Оскільки $5^x > 0$ при будь-якому x, то рівняння $5^x = -5$ не має коренів.

Відповідь: 0. ◄

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.

Розв'язання. Маємо: $4 \cdot 2^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 18 \cdot 3^{2x} = 0$.

Оскільки $3^{2x} \neq 0$ при будь-якому x, то, поділивши обидві частини рівняння на 3^{2x}, отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$$4 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0; \quad 4 \cdot \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0.$$

Нехай $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$. Тоді можна записати:

$$4t^2 - t - 18 = 0.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = \frac{9}{4}. \end{array}\right.$ Маємо: $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = -2, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}. \end{array}\right.$

Оскільки $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$ при будь-якому x, то перше рівняння сукупності розв'язків не має. Друге рівняння сукупності перепишемо так:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}.$$

Звідси $x = -2$.

Відповідь: -2. ◄

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $2^x + 5^x = 7^x$.

Розв'язання. Очевидно, що $x = 1$ — корінь даного рівняння. Покажемо, що цей корінь — єдиний.

Поділивши обидві частини початкового рівняння на 7^x, отримаємо:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$. Оскільки функції $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ і $y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$ є спадними, то функція f також спадна, а отже, кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Тому рівняння $f(x) = 1$ має єдиний корінь.

Відповідь: 1. ◀

ПРИКЛАД 8 При яких значеннях параметра a рівняння $4^x - (a+3)\ 2^x + 4a - 4 = 0$ має єдиний корінь?

Розв'язання. Нехай $2^x = t$. Маємо: $t^2 - (a+3)\,t + 4a - 4 = 0$. Звідси $t_1 = 4$, $t_2 = a - 1$. Отже, початкове рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 4, \\ 2^x = a - 1. \end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності має єдиний корінь $x = 2$. Друге рівняння сукупності при кожному значенні параметра a має один корінь або взагалі не має коренів.

Для виконання умови задачі друге рівняння сукупності повинно або не мати коренів, або мати єдиний корінь, який дорівнює 2.

Якщо $a \leqslant 1$, тобто $a - 1 \leqslant 0$, то рівняння $2^x = a - 1$ коренів не має.

Число 2 є коренем другого рівняння сукупності, якщо $2^2 = a - 1$. Звідси $a = 5$.

Відповідь: $a \leqslant 1$ або $a = 5$. ◀

?

1. Наведіть приклади показникових рівнянь.
2. Яка рівність випливає з рівності $a^{x_1} = a^{x_2}$, де $a > 0$ і $a \neq 1$?
3. Якому рівнянню рівносильне рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, де $a > 0$ і $a \neq 1$?

ВПРАВИ

2.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4^x = 64$;	3) $0{,}6^{2x-3} = 1$;	5) $2^{5-x} = 2^{3x-7}$;
2) $3^x = \frac{1}{81}$;	4) $10^{-x} = 0{,}001$;	6) $8^x = 16$;

7) $0{,}16^x = \frac{5}{2}$;

8) $\sqrt{5^x} = 25$;

9) $0{,}25^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$;

10) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$;

11) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^5$;

12) $\left(\frac{4}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{4}\right)^{7x-3}$;

13) $36^x = \left(\frac{1}{216}\right)^{2-x}$;

14) $5^{x^2-2x} = 6^{x^2-2x}$;

15) $3^{x-1} = 6^x \cdot 2^{-x} \cdot 3^{x+1}$.

2.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}4^{x^2-x-6} = 1$;

2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3}$;

3) $0{,}7^x = 2\frac{2}{49}$;

4) $9^{-x} = 27$;

5) $\sqrt{2^x} = 8^{-\frac{2}{3}}$;

6) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4{,}5^{x-2}$;

7) $100^x = 0{,}01\sqrt{10}$;

8) $\left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^x = \frac{125}{64}$;

9) $2^{x-1} \cdot 3^{x-1} = \frac{1}{36} \cdot 6^{2x+5}$;

10) $32^{\frac{3}{5}x-2} = 4^{6-\frac{3}{2}x}$;

11) $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$;

12) $16^{5-3x} = 0{,}125^{5x-6}$.

2.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{x+2} + 3^x = 30$;

2) $4^{x+1} + 4^{x-2} = 260$;

3) $2^{x+4} - 2^x = 120$;

4) $7^{x+1} + 4 \cdot 7^x = 77$;

5) $5^x + 7 \cdot 5^{x-2} = 160$;

6) $6^{x+1} - 4 \cdot 6^{x-1} = 192$.

2.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1} + 5^x = 150$;

2) $2^x + 2^{x-3} = 18$;

3) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$;

4) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} = 52$.

2.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$;

2) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$;

3) $25^x - 5^x - 20 = 0$;

4) $100 \cdot 0{,}3^{2x} + 91 \cdot 0{,}3^x - 9 = 0$.

2.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $6^{2x} - 3 \cdot 6^x - 18 = 0$;

2) $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$.

2.7.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{9} \cdot \sqrt{3^{3x-1}} = 81^{-\frac{3}{4}}$;

2) $4^x \cdot 3^{x+1} = 0{,}25 \cdot 12^{3x-1}$;

3) $4\cdot 2^{\cos x}=\sqrt{8}$;

4) $0{,}25\cdot 2^{x^2}=\sqrt[3]{0{,}25\cdot 4^{2x}}$;

5) $5^{x-1}=10^x\cdot 2^{-x}\cdot 5^{x+1}$;

6) $\sqrt[3]{9^{2x+1}}=\dfrac{3}{\sqrt[5]{3}}$.

2.8.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{\sqrt{32}}{16^{x^2}}=8^{3x}$;

2) $9\cdot 3^{\sin x}=\sqrt{27}$;

3) $2^{x-1}=12^{2x}\cdot 3^{-2x}\cdot 2^{x+1}$;

4) $\sqrt[5]{7^{x+1}}=\dfrac{49}{\sqrt{7}}$.

2.9.• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=56$;

2) $6\cdot 5^x-5^{x+1}-3\cdot 5^{x-1}=10$;

3) $2\cdot 7^x+7^{x+2}-3\cdot 7^{x-1}=354$;

4) $4^{x-2}-3\cdot 2^{2x-1}+5\cdot 2^{2x}=228$;

5) $4\cdot 9^{1{,}5x-1}-27^{x-1}=33$;

6) $0{,}5^{5-2x}+3\cdot 0{,}25^{3-x}=5$;

7) $2^{2x+1}+4^x-\left(\dfrac{1}{16}\right)^{1-0{,}5x}=47$;

8) $4\cdot 3^x-5\cdot 3^{x-1}-6\cdot 3^{x-2}=15\cdot 9^{x^2-1}$.

2.10.• Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=31$;

2) $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-1}-4\cdot 3^{x-2}=17$;

3) $2^{x+2}-2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-2}=9$;

4) $2\cdot 3^{2x+1}+3^{2x-1}-5\cdot 3^{2x}=36$;

5) $6^{x-2}-\left(\dfrac{1}{6}\right)^{3-x}+36^{\frac{x-1}{2}}=246$;

6) $5\cdot 2^{x-1}-6\cdot 2^{x-2}-7\cdot 2^{x-3}=8^{x^2-1}$.

2.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x+1}-5\cdot 2^x+2=0$;

2) $4^{x+1}+4^{1-x}=10$;

3) $5^{2x-3}-2\cdot 5^{x-2}=3$;

4) $9^x-6\cdot 3^{x-1}=3$;

5) $3^{x+1}+3^{2-x}=28$;

6) $\dfrac{9}{2^x-1}-\dfrac{21}{2^x+1}=2$.

2.12.• Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{2x+1}-10\cdot 3^x+3=0$;

2) $2^{3-2x}-3\cdot 2^{1-x}+1=0$;

3) $5^x-0{,}2^{x-1}=4$;

4) $4^{x+0{,}5}-7\cdot 2^x=4$;

5) $3\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}=0{,}2$;

6) $\dfrac{5}{3^x-6}+\dfrac{5}{3^x+6}=2$.

2.13.• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$;

2) $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} = 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$;

3) $7^x - 5^{x+2} = 2\cdot 7^{x-1} - 118\cdot 5^{x-1}$.

2.14.• Розв'яжіть рівняння:

1) $6^x + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^x - 8\cdot 7^{x-2}$;

2) $5^x - 2\cdot 5^{x-1} = 3^{x+1} - 2\cdot 3^{x-2}$;

3) $2^{\sqrt{x}+1} - 3^{\sqrt{x}} = 3^{\sqrt{x}-1} - 2^{\sqrt{x}}$.

2.15.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $27^{\frac{2}{x}} - 2\cdot 3^{\frac{x+3}{x}} - 27 = 0$;

2) $\sqrt[3]{49^x} - 50\sqrt[3]{7^{x-3}} + 1 = 0$;

3) $2^{\sqrt{x+1}} = 3\cdot 2^{2-\sqrt{x+1}} + 1$;

4) $3^{\sqrt{x-5}} + 3^{2-\sqrt{x-5}} = 6$;

5) $5\cdot 2^{\cos^2 x} - 2^{\sin^2 x} = 3$;

6) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$;

7) $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0$.

2.16.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{2x+3}{x}} - 32 = 0$;

2) $5^{\sqrt{x-2}} - 5^{1-\sqrt{x-2}} - 4 = 0$;

3) $2^{\cos 2x} - 3\cdot 2^{\cos^2 x} + 4 = 0$.

2.17.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\cdot 2^{2x} - 5\cdot 6^x + 2\cdot 3^{2x} = 0$;

2) $2^{2x+1} - 7\cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0$;

3) $7\cdot 49^x + 3\cdot 28^x = 4\cdot 16^x$;

4) $9^x + 4^x = 2\cdot 6^x$.

2.18.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4\cdot 9^x - 7\cdot 12^x + 3\cdot 16^x = 0$;

2) $5\cdot 2^x + 2\cdot 5^x = 7\cdot 10^{\frac{x}{2}}$.

2.19.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4\cdot 2^x - 7}$.

2.20.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1 + 3^x - 9^x} = \sqrt{4 - 3\cdot 3^x}$.

2.21.•• Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

2.22.•• Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = 8$.

2.23.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4^{x+\frac{1}{2}} + \frac{2}{4^x} + 14 = 9\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)$;

2) $9^{x+\frac{1}{2}} + \frac{3}{9^x} + 26 = 16(3^x + 3^{-x})$.