

А. А. Черняк  
Ж. А. Черняк  
Ю. А. Доманова

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min$$

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА НА БАЗЕ Mathcad ОБЩИЙ КУРС

Symbo

- **Дифференциальное и интегральное исчисление**  
Пределы, производные, интегралы и их применение

- **Дифференциальные уравнения**  
Уравнения первого порядка, уравнения высших порядков, устойчивость решений

- **Ряды**  
Числовые, функциональные, степенные ряды и их приложения

$$S^T - S_T = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \geq$$

- **Линейная алгебра и элементы аналитической геометрии**  
Матрицы,  $n$ -мерное векторное пространство, прямые и плоскости в  $n$ -мерном точечном пространстве

- **Интегрированная среда Mathcad**  
Демонстрация возможностей и применение в решении трудоемких математических задач

$$X \subseteq Af^n$$

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

bhv®

**А. А. Черняк  
Ж. А. Черняк  
Ю. А. Доманова**

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА  
НА БАЗЕ МАТНСАД  
ОБЩИЙ КУРС**

Санкт-Петербург  
«БХВ-Петербург»  
2004

УДК 681.3.06(075.8)

ББК 32.973.26-018.2я73

Ч-49

**Черняк А. А., Черняк Ж. А., Доманова Ю. А.**

Ч-49 Высшая математика на базе Mathcad. Общий курс. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 608 с.: ил.

ISBN 5-94157-470-3

Учебное пособие охватывает следующие разделы высшей математики: дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды, линейная алгебра и элементы аналитической геометрии, а также описание интегрированной среды Mathcad. Содержание теоретического материала соответствует государственным образовательным стандартам преподавания общего курса высшей математики на экономических и инженерно-технических специальностях вузов. Возможности компьютерного пакета Mathcad демонстрируются с помощью алгоритмов решения трудоемких вычислительных задач.

*Для студентов экономических и инженерно-технических специальностей вузов*

УДК 681.3.06(075.8)

ББК 32.973.26-018.2я73

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов экономических специальностей высших учебных заведений

Рецензенты:

Белько И. В., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета.

Кафедра методов оптимального управления Белорусского государственного университета.

### **Группа подготовки издания:**

Главный редактор	Екатерина Кондукова
Зам. главного редактора	Людмила Еремеевская
Зав. редакцией	Григорий Добин
Редактор	Анатолий Хрипов
Компьютерная верстка	Наталья Смирновой
Корректор	Наталья Першакова
Дизайн обложки	Игоря Цыбульникова
Зав. производством	Николай Тверских

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 12.02.04.

Формат 70×100<sup>1/16</sup>. Печать офсетная. Усл. печ. л. 49,02.

Тираж 3000 экз. Заказ №  
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02  
от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в Академической типографии "Наука" РАН  
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12.

ISBN 5-94157-470-3

© Черняк А. А., Черняк Ж. А., Доманова Ю. А., 2004  
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2004

# Содержание

Предисловие .....	1
<b>ЧАСТЬ I. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ .....</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Понятие множества.....</b>	<b>7</b>
Задачи для самостоятельного решения.....	9
Общая формулировка задач П1.1—П1.21 .....	10
Ответы, указания, решения .....	10
<b>Глава 2. Предел последовательности.....</b>	<b>12</b>
Компьютерный раздел.....	16
Задачи для самостоятельного решения.....	21
Общая формулировка задач П2.1—П2.21 .....	22
Общая формулировка задач К2.1—К2.11 .....	23
Ответы, указания, решения .....	23
<b>Глава 3. Предел функции .....</b>	<b>31</b>
Компьютерный раздел.....	37
Задачи для самостоятельного решения.....	43
Общая формулировка задач П3.1—П3.20 .....	44
Общая формулировка задач К3.1—К3.10 .....	46
Ответы, указания, решения .....	47
<b>Глава 4. Непрерывные функции .....</b>	<b>50</b>
Компьютерный раздел.....	55
Задачи для самостоятельного решения.....	63
Общая формулировка задач К4.1—К4.11 .....	64
Ответы, указания, решения .....	66
<b>Глава 5. Общая задача условной оптимизации .....</b>	<b>70</b>
Компьютерный раздел.....	73
Задачи для самостоятельного решения.....	76
Общая формулировка задач К5.1—К5.11 .....	76
Ответы, указания, решения .....	78

<b>ЧАСТЬ II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.....</b>	<b>79</b>
<b>Глава 6. Классификация бесконечно малых функций одной переменной .....</b>	<b>81</b>
Задачи для самостоятельного решения .....	84
Общая формулировка задач П6.1—П6.21 .....	85
Ответы, указания, решения .....	86
<b>Глава 7. Производная функции одной переменной.....</b>	<b>88</b>
Компьютерный раздел .....	91
Задачи для самостоятельного решения .....	95
Общая формулировка задач К7.1—К7.10 .....	95
Ответы, указания, решения .....	96
<b>Глава 8. Правила и формулы дифференцирования функции одной переменной .....</b>	<b>98</b>
Компьютерный раздел .....	101
Задачи для самостоятельного решения .....	105
Общая формулировка задач П8.1—П8.21 .....	105
Общая формулировка задач К8.1—К8.11 .....	106
Ответы, указания, решения .....	107
<b>Глава 9. Производные и дифференциалы высших порядков .....</b>	<b>112</b>
Компьютерный раздел .....	113
Задачи для самостоятельного решения .....	120
Общая формулировка задач П9.1—П9.21 .....	121
Общая формулировка задач К9.1—К9.10 .....	122
Ответы, указания, решения .....	123
<b>Глава 10. Теоремы о промежуточных значениях.....</b>	<b>126</b>
Задачи для самостоятельного решения .....	128
Ответы, указания, решения .....	130
<b>Глава 11. Следствия теорем о средних значениях .....</b>	<b>132</b>
Компьютерный раздел .....	135
Задачи для самостоятельного решения .....	139
Общая формулировка задач П11.1 (а)—П11.21 (а) .....	140
Общая формулировка задач П11.1 (б)—П11.21 (б) .....	141
Общая формулировка задач К11.1—К11.12 .....	142
Ответы, указания, решения .....	142
<b>Глава 12. Эластичность функций .....</b>	<b>148</b>
Задачи для самостоятельного решения .....	150
Ответы, указания, решения .....	150

<b>Глава 13. Формула Тейлора .....</b>	<b>152</b>
Компьютерный раздел.....	157
Задачи для самостоятельного решения.....	162
Общая формулировка задач П13.1—П13.21 .....	164
Общая формулировка задач К13.1—К13.11.....	165
Ответы, указания, решения .....	165
<b>Глава 14. Частные производные .....</b>	<b>174</b>
Компьютерный раздел.....	178
Задачи для самостоятельного решения .....	189
Общая формулировка задач П14.1—П14.21 .....	189
Общая формулировка задач К14.1—К14.10.....	190
Ответы, указания, решения .....	192
<b>Глава 15. Общая задача нелинейного программирования.....</b>	<b>196</b>
Компьютерный раздел.....	198
Задачи для самостоятельного решения .....	201
Общая формулировка задач П15.1—П15.21 .....	201
Общая формулировка задач К15.1—15.11.....	204
Ответы, указания, решения .....	204
<b>ЧАСТЬ III. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.....</b>	<b>209</b>
<b>Глава 16. Неопределенный интеграл .....</b>	<b>211</b>
Задачи для самостоятельного решения .....	217
Общая формулировка задач П16.1—П16.21 .....	218
Ответы, указания, решения .....	219
<b>Глава 17. Определенный интеграл.....</b>	<b>224</b>
Компьютерный раздел.....	228
Задачи для самостоятельного решения .....	229
Общая формулировка задач К17.1—К17.10 .....	230
Ответы, указания, решения .....	231
<b>Глава 18. Интеграл с переменным верхним пределом .....</b>	<b>240</b>
Компьютерный раздел.....	246
Задачи для самостоятельного решения .....	247
Общая формулировка задач П18.1—П18.21 .....	249
Общая формулировка задач К18.1—К18.10 .....	251
Ответы, указания, решения .....	252

<b>Глава 19. Приложения определенных интегралов .....</b>	<b>256</b>
Задачи для самостоятельного решения .....	258
Общая формулировка задач П19.1—П19.4 .....	259
Общая формулировка задач П19.5—П19.8 .....	259
Общая формулировка задач П19.9—П19.12 .....	260
Общая формулировка задач П19.13—П19.16 .....	260
Общая формулировка задач П19.17—П19.21 .....	260
Ответы, указания, решения .....	261
<b>Глава 20. Двойной интеграл.....</b>	<b>266</b>
Компьютерный раздел.....	274
Задачи для самостоятельного решения .....	276
Общая формулировка задач П20.1—П20.21 .....	277
Общая формулировка задач К20.1—К20.11 .....	279
Ответы, указания, решения .....	280
<b>ЧАСТЬ IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....</b>	<b>289</b>
<b>Глава 21. Дифференциальные уравнения: общие понятия .....</b>	<b>291</b>
Компьютерный раздел.....	295
Задачи для самостоятельного решения .....	298
Общая формулировка задач К21.1—К21.11 .....	299
Ответы, указания, решения .....	300
<b>Глава 22. Дифференциальные уравнения первого порядка .....</b>	<b>305</b>
Компьютерный раздел.....	311
Задачи для самостоятельного решения .....	314
Общая формулировка задач П22.1—П22.21 .....	315
Общая формулировка задач К22.1—К22.10 .....	317
Ответы, указания, решения .....	318
<b>Глава 23. Дифференциальные уравнения высших порядков .....</b>	<b>325</b>
Компьютерный раздел.....	330
Задачи для самостоятельного решения .....	333
Общая формулировка задач П23.1—П23.21 .....	334
Общая формулировка задач К23.1—К23.11 .....	335
Ответы, указания, решения .....	336
<b>Глава 24. Устойчивость решений дифференциальных уравнений .....</b>	<b>339</b>
Компьютерный раздел.....	342
Задачи для самостоятельного решения .....	344
Общая формулировка задач К24.1—К24.11 .....	344
Ответы, указания, решения .....	345

<b>ЧАСТЬ V. Ряды .....</b>	<b>349</b>
<b>Глава 25. Ряды: основные понятия и свойства .....</b>	<b>351</b>
Компьютерный раздел.....	355
Задачи для самостоятельного решения.....	358
Общая формулировка задач К25.1—К25.11 .....	359
Ответы, указания, решения .....	360
<b>Глава 26. Достаточные признаки сходимости рядов .....</b>	<b>363</b>
Компьютерный раздел.....	369
Задачи для самостоятельного решения.....	370
Общая формулировка задач П26.1—П26.21 .....	371
Общая формулировка задач К26.1—К26.11 .....	373
Ответы, указания, решения .....	374
<b>Глава 27. Условная и абсолютная сходимости .....</b>	<b>384</b>
Компьютерный раздел.....	387
Задачи для самостоятельного решения.....	388
Общая формулировка задач П27.1—П27.21 .....	388
Общая формулировка задач К27.1—10 .....	389
Ответы, указания, решения .....	390
<b>Глава 28. Основные свойства равномерно сходящихся рядов.....</b>	<b>393</b>
Задачи для самостоятельного решения.....	397
Ответы, указания, решения .....	398
<b>Глава 29. Степенные ряды .....</b>	<b>403</b>
Задачи для самостоятельного решения .....	406
Общая формулировка задач П29.1—П29.21 .....	406
Ответы, указания, решения .....	407
<b>Глава 30. Приложения степенных рядов .....</b>	<b>412</b>
Задачи для самостоятельного решения .....	416
Общая формулировка задач П30.1—П30.21 .....	417
Ответы, указания, решения .....	418
<b>ЧАСТЬ VI. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.....</b>	<b>421</b>
<b>Глава 31. Векторное пространство действительных чисел.....</b>	<b>423</b>
Компьютерный раздел.....	425
Задачи для самостоятельного решения .....	434
Общая формулировка задач К31.1—К31.11 .....	435
Ответы, указания, решения .....	436

<b>Глава 32. Линейно независимые системы векторов.....</b>	<b>440</b>
Компьютерный раздел.....	442
Задачи для самостоятельного решения.....	445
Общая формулировка задач К32.1—11 .....	446
Ответы, указания, решения .....	446
<b>Глава 33. Матрицы: общие понятия .....</b>	<b>449</b>
Компьютерный раздел.....	452
Задачи для самостоятельного решения.....	456
Общая формулировка задач П33.1—П33.21 .....	456
Общая формулировка задач К33.1—К33.11 .....	459
Ответы, указания, решения .....	462
<b>Глава 34. Метод Гаусса .....</b>	<b>468</b>
Компьютерный раздел.....	472
Задачи для самостоятельного решения.....	475
Общая формулировка задач П34.1—П34.21 .....	476
Общая формулировка задач К34.1—К34.11 .....	477
Ответы, указания, решения .....	479
<b>Глава 35. Следствия метода Гаусса .....</b>	<b>483</b>
Задачи для самостоятельного решения.....	486
Общая формулировка задач П35.1—П35.21 .....	486
Ответы, указания, решения .....	489
<b>Глава 36. Обратные матрицы .....</b>	<b>493</b>
Компьютерный раздел.....	496
Задачи для самостоятельного решения.....	498
Общая формулировка задач П36.1—П36.21 .....	499
Общая формулировка задач К36.1—К36.5, К36.11(а).....	500
Общая формулировка задач К36.6—К36.10, К36.11(б).....	501
Ответы, указания, решения .....	502
<b>Глава 37. Определители .....</b>	<b>507</b>
Компьютерный раздел.....	510
Задачи для самостоятельного решения.....	511
Общая формулировка задач К37.1—К37.11 .....	513
Ответы, указания, решения .....	515
<b>Глава 38. Структура общего решения линейного дифференциального уравнения.....</b>	<b>520</b>
Задачи для самостоятельного решения .....	526
Общая формулировка задач П38.1—П38.21 .....	527
Ответы, указания, решения .....	528

<b>Глава 39. Прямые и плоскости в n-мерном точечном пространстве.....</b>	<b>532</b>
Компьютерный раздел.....	534
Задачи для самостоятельного решения.....	535
Общая формулировка задач К39.1—К39.11 .....	535
Ответы, указания, решения .....	536
<b>Глава 40. Плоскости и прямые в двумерном и трехмерном пространствах .....</b>	<b>539</b>
Компьютерный раздел.....	540
Задачи для самостоятельного решения.....	547
Общая формулировка задач П40.1—П40.21 .....	548
Общая формулировка задач К40.1—К40.11 .....	549
Ответы, указания, решения .....	549
<b>Глава 41. Метод наименьших квадратов .....</b>	<b>555</b>
Задачи для самостоятельного решения.....	557
Общая формулировка задач П41.1—П41.21 .....	557
Ответы, указания, решения .....	558
<b>Приложение. Интерфейсные возможности Mathcad и редактирование формульных блоков .....</b>	<b>561</b>
П1. Окно редактирования .....	561
П2. Панели инструментов .....	567
Панель инструментов <i>Стандартная</i> .....	568
Панель инструментов <i>Форматирование</i> .....	569
Панель инструментов <i>Математика</i> .....	570
П3. Редактирование формульных блоков .....	573
<b>Список литературы .....</b>	<b>590</b>
<b>Предметный указатель.....</b>	<b>591</b>



Дороги не те знания, которые отлагаются  
в мозгу, как жир; дороги те, которые  
превращаются в умственные мышцы.

Г. Спенсер

# Предисловие

Основная идея книги: синтезировать традиционные принципы преподавания высшей математики для экономистов с новейшими достижениями компьютерной математики. При реализации этой идеи авторы исходили из следующих двух постулатов.

1. Учебник должен быть самодостаточным и содержать: исчерпывающее и строгое изложение классических основ высшей математики, а также блоки обучающих задач, сопровождаемых демонстрационными примерами. Учебник должен опираться на современные достижения в образовательных компьютерных технологиях и использовать их, не нанося ущерба математически строгому изложению теории.
2. Компьютерная математика не способна полностью исключить традиционные методы в преподавании, однако призвана сделать это преподавание более эффективным и доступным. Она всего лишь инструмент, позволяющий сосредоточить внимание студента на логике методов и алгоритмов, освобождая от необходимости освоения громоздких, незапоминающихся и потому бесполезных вычислительных процедур и трюков. И использование этого инструмента только в качестве иллюстративного средства с целью "уберечь" студента от "скучной" математики, сведя ее постижение к нажатию кнопок мыши и клавиш клавиатуры, сродни комиксам, низводящим классические произведения литературы до уровня примитивных мультишек.

Содержание книги разбито на 6 частей: введение в теорию функций нескольких переменных, дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды, линейная алгебра и элементы аналитической геометрии. **Несмотря на традиционное содержание, продиктованное программой общего курса высшей математики, книга имеет нетрадиционную структуру.** Это связано с тем, что в последние годы вычислительная техника все глубже проникает в различные сферы человеческой деятельности. И вопреки некоторой инертности и консервативности образования, компьютеры активно участвуют в процессе обучения, облегчая его, улучшая качество

получаемых знаний и ускоряя процесс адаптации нынешних студентов к новой, "компьютерной" жизни.

**Во-первых**, главы содержат теорию, компьютерные разделы, блоки задач для самостоятельного решения, ответы и решения задач. Содержание теоретического материала соответствует государственным образовательным стандартам преподавания высшей математики на экономических специальностях вузов, а его структура ориентирована на использование любого пакета компьютерной математики, хотя базовым пакетом книги является Mathcad. Благодаря такой структуре отпада необходимость в изложении громоздких методов и приемов интегрирования, дифференцирования, решения дифференциальных уравнений, обращения матриц и т. д. — подобные процедуры "доверены" компьютеру, связь с которым реализуется через пакет Mathcad. Тем самым разгружена содержательная часть книги, а внимание потенциального читателя акцентировано на логике понятий и методов.

**Во-вторых**, данное пособие предполагает многоуровневое постижение основ высшей математики. Учитывая и уважая возможности контингента своих читателей, книга позволяет варьировать степень подробности и глубины изучения предмета. Так, возможно беглое знакомство с основным текстом главы на уровне определений, основных свойств и несложных иллюстративных примеров, опуская доказательства двух-трех базовых теорем данной главы. При более пристальном внимании можно вникнуть в доказательства приводимых в главе теорем, что позволяет понять взаимосвязь между основными понятиями и их свойствами. Наконец, самый заинтересованный читатель обратит свое внимание на те утверждения, которые лишь формулируются в тексте главы и предназначаются для самостоятельного осмысления. Каждая глава сопровождается практическим материалом, также дифференцированным по уровням. Творческий уровень представлен здесь теоретическими задачами, которые, с одной стороны, позволяют дополнить теорию, а с другой — указать ее тонкие и проблемные моменты. В случае затруднений в решении этих задач можно обратиться за помощью или подсказкой к разд. "*Ответы, указания, решения*". Следующий уровень практических задач — типовые. Здесь приводятся 20 несложных примеров и один-два демонстрационных образца с подробным их решением. Эти задачи доступны среднему студенту и предназначены для приобретения практических навыков в освоении алгоритмов и методов, доступных для ручного счета и обработки, их можно также использовать в качестве практикума для студентов-заочников. Задачи третьего уровня — компьютерные, ориентированные на использование пакетов компьютерной математики и недоступные для ручной обработки. Каждый блок таких задач содержит по 10 однотипных примеров, в обязательном порядке сопровождаемых алгоритмами решения с помощью операторов и функций Mathcad.

**Во-третьих**, авторы стремились создать пособие, содержащее строгое описание основ классической математики, предложив собственный подход к изложению ряда разделов. Так, в *главах 2—11* реализован принцип "от общего к частному", где изначально понятия предела и непрерывности функций вводятся в классе функций  $n$  переменных, определенных в  $n$ -мерных точечных пространствах. Такой подход, вопреки сложившимся стереотипам, на наш взгляд, позволил сделать математически более мотивированными и прозрачными соответствующие понятия в классе функций одной переменной. В *главе 6* дана естественная классификация бесконечно малых функций по уровням малости, что позволило четко определить понятие главной части функции и указать методы ее нахождения. В *главах 21—23*, объединенных единой идеей интегрирующего множителя, излагаются типы дифференциальных уравнений и методы их интегрирования. Также с единых позиций (через суммы Дарбу) ведется изложение теории определенного и двойного интегралов (*главы 17—20*). Основные теоремы линейной алгебры (*главы 31—41*) о вырожденных и обратных матрицах, определителях, системах линейных уравнений и т. д., фактически доказаны с помощью только двух "сквозных" понятий — линейной независимости и элементарного преобразования системы векторов.

Хотя теоретический материал книги ориентирован на использование произвольных пакетов компьютерной математики, базовым для книги является Mathcad. Mathcad выгодно отличается от других пакетов возможностью свободно компоновать рабочий лист и относительной легкостью изучения. Так же, как с карандашом в руке решается задача на листе бумаги, можно оформить и соответствующий Mathcad-документ. Если некоторое время не возникает необходимости работать с Mathcad, то впоследствии навыки пользования пакетом легко восстанавливаются (тогда как в других пакетах компьютерной математики используется очень сложный синтаксис, который быстро забывается, если не работать с этим пакетом постоянно). Кроме того, Mathcad — это универсальная, а не специализированная математическая среда.

Описание Mathcadдается в компьютерных разделах глав параллельно изложению математической теории, что позволяет потенциальному читателю постепенно усваивать широкие возможности пакета без отрыва от конкретного математического контекста. При этом те или иные процедуры, функции и операторы Mathcad подробно описываются в компьютерном разделе именно той главы, где они впервые встречаются.

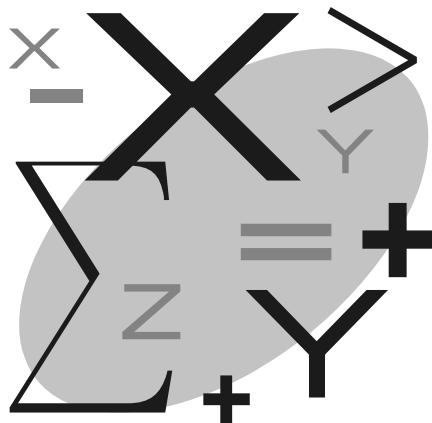
Новейшей версией Mathcad (на момент сдачи книги в набор) являлся Mathcad 11 Enterprise Edition, которому предшествовали Mathcad 2000 Pro и Mathcad 2001 Pro. Компьютерные разделы глав адаптированы к любой из этих версий. При этом следует иметь в виду, что существует обилие русифи-

цированных вариантов Mathcad (даже в рамках одной его версии), в которых возможны непринципиальные внешние отличия некоторых диалоговых окон и панелей от приводимых в книге.

Нумерация глав сквозная. Теоремы, утверждения, леммы, следствия, рисунки, формулы и задачи нумеруются двумя числами: первое из них — это номер главы, второе — их порядковый номер в самой главе. В приложении, дополняющем компьютерные разделы глав, дается обзор панелей инструментов и описание способов редактирования формульных блоков.

Данная книга, вместе с ранее вышедшим учебным пособием "Математика для экономистов на базе Mathcad", изд-во БХВ-Петербург, 2003, охватывают программу всего цикла математических дисциплин для студентов экономических специальностей вузов.

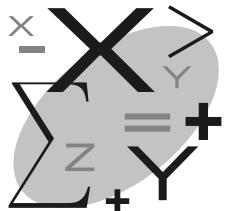
Авторы: доктор физико-математических наук, профессор, лауреат премии Академии наук Беларуси А. А. Черняк, кандидат физико-математических наук, доцент, Соросовский доцент Ж. А. Черняк, старший преподаватель Доманова Ю. А.



## ЧАСТЬ I

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ





# Глава 1

## Понятие множества

Под множеством будем понимать совокупность различных объектов, объединенных по определенному признаку. Объекты, составляющие множество, называются его элементами. Тот факт, что объект  $a$  является элементом множества  $A$ , записывается так:  $a \in A$ . Запись  $a \notin A$  означает, что  $a$  не является элементом множества  $A$ . Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается  $\emptyset$ .

**Пример.** Множество решений системы уравнений  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$  является пустым множеством, поскольку система не имеет ни одного решения.

Пусть  $A$  и  $B$  — два множества. Тогда между ними можно определить следующие отношения. Если оба множества состоят из одних и тех же элементов, то они равны:  $A = B$ . Если все элементы множества  $A$  являются также элементами множества  $B$ , то  $A$  является подмножеством множества  $B$ , что обозначается  $A \subseteq B$ . Запись  $A \subset B$  означает, что  $A$  является подмножеством  $B$ , не совпадающим с  $B$ .

**Пример.** Множество  $A$  убыточных предприятий является подмножеством множества  $B$  всех предприятий, т. е.  $A \subseteq B$ .

Объединением двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $C$ , состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $A$  или  $B$ :  $C = A \cup B$ . Пересечением  $A$  и  $B$  называется множество  $C$ , состоящее из всех элементов, принадлежащих обоим множествам  $A$  и  $B$ :  $C = A \cap B$ . Разностью множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $C$ , состоящее из тех элементов  $A$ , которые не содержатся в  $B$ :  $C = A \setminus B$ .

Схематически операции над множествами показаны на рис. 1.1.

При рассмотрении числовых и точечных множеств вместо слова "элемент" употребляется также слово "точка".

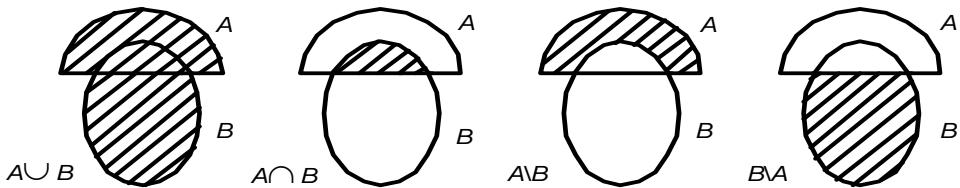


Рис. 1.1. Операции над множествами

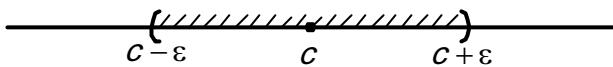
$n$ -мерной точкой  $A$  называется упорядоченный набор  $(a_1, \dots, a_n)$   $n$  действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , называемых координатами точки  $A$ . Множество всех  $n$ -мерных точек называется  $n$ -мерным точечным (или  $n$ -мерным евклидовым) пространством  $Af^n$ , если задано расстояние  $\rho(A, B)$  между любыми двумя точками  $A = (a_1, \dots, a_n)$  и  $B = (b_1, \dots, b_n)$ , определяемое формулой:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

Окрестностью радиуса  $\varepsilon$  точки  $A$  называется множество всех таких точек пространства  $Af^n$ , расстояние от которых до точки  $A$  меньше  $\varepsilon$ . Обозначается такая окрестность  $N(A, \varepsilon)$ .

**Утверждение 1.1** (правило треугольника). Для любых трех точек  $A, B, C$  из  $Af^n$  верно  $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B)$ .

**Примеры.** Одномерное точечное пространство  $Af^1$  — это прямая, на которой расстояние между точками  $a$  и  $b$  равно  $\sqrt{(a - b)^2} = |a - b|$ ; окрестность  $N(c, \varepsilon)$  в этом пространстве — интервал  $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$ , который графически представлен на рис. 1.2.

Рис. 1.2. Окрестность в пространстве  $Af^1$ 

Двумерное точечное пространство  $Af^2$  — это плоскость; окрестность  $N(A, \varepsilon)$  в этом пространстве — круг без границы с центром в точке  $A$  радиусом  $\varepsilon$ .

Пусть  $a$  — либо число, либо символ  $-\infty$ ,  $b$  — либо число, либо символ  $+\infty$ . Промежутком  $X = \langle a; b \rangle$  в  $Af^1$  называется множество всех точек, лежащих на прямой между  $a$  и  $b$ . Числа  $a$  и  $b$  могут как включаться в промежуток

$X = \langle a; b \rangle$ , так и не включаться в него. Если оба числа  $a, b$  включаются в промежуток  $X = \langle a; b \rangle$ , то  $X$  называется отрезком и обозначается  $[a; b]$ , если оба числа  $a, b$  не включаются в  $X$ , то  $X$  называется интервалом и обозначается  $(a; b)$ ; если ровно одно из чисел  $a, b$  включается в  $X$ , то  $X$  называется полуинтервалом и обозначается  $(a; b]$  или  $[a; b)$ .

Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — произвольные промежутки в пространстве  $Af^1$ .  $n$ -мерным промежутком в пространстве  $Af^n$  называется множество всех таких точек из  $Af^n$ ,  $i$ -е координаты которых принадлежат  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Обозначается такой  $n$ -мерный промежуток  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ .

**Пример.** В пространстве  $Af^2$  двумерные промежутки являются прямоугольниками или прямоугольными областями. Так, на рис. 1.3 изображены промежутки  $[3; 4] \times [1; 2]$  и  $(-\infty; -1] \times (-\infty; -2]$ .

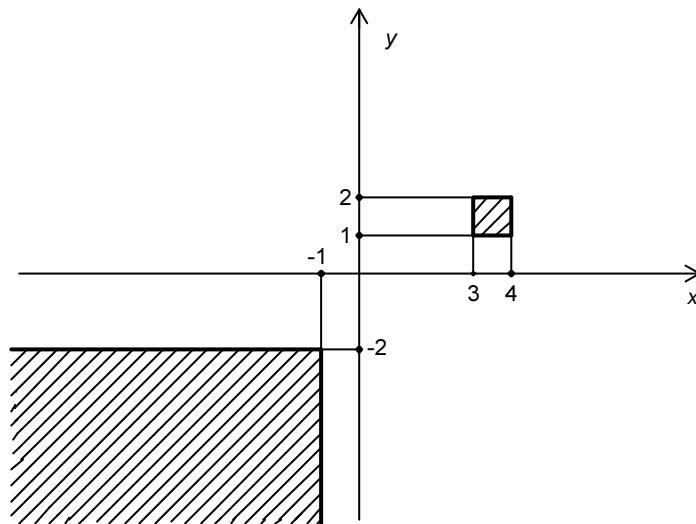


Рис. 1.3. Промежутки в пространстве  $Af^2$

## Задачи для самостоятельного решения

- T1.1.** Привести примеры числовых множеств  $A$  и  $B$  таких, что: а)  $A \cup B = Af^1$  и  $A \cap B = \emptyset$ ; б)  $A \cup B = A$ . Показать, что  $A \cup B = A \Leftrightarrow A \cap B = B$ .

**T1.2.** Пусть даны точка  $M \in Af^n$  и число  $\varepsilon > 0$ . Доказать, что существует такой  $n$ -мерный промежуток  $X$ , что  $X \subset N(M, \varepsilon)$ .

**T1.3.** Пусть даны точка  $M \in Af^n$  и число  $\varepsilon > 0$ . Доказать, что существует такой  $n$ -мерный промежуток  $X$ , что  $N(M, \varepsilon) \subset X$ .

**T1.4.** Пусть даны точка  $M \in Af^n$  и два числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , где  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ . Всегда ли существует такой  $n$ -мерный промежуток  $X$ , что  $N(M, \varepsilon_1) \subset X \subset N(M, \varepsilon_2)$ ?

## Общая формулировка задач П1.1—П1.21

**П1.1—21.** (здесь число  $k$  совпадает с номером решаемой задачи  $k = 1, 2, \dots, 21$ .) Перечислить элементы множеств  $A, B, C$  и найти  $A \cup B, B \cap C, (A \cup B) \cap C, CB$ , если:  $A$  — множество всех делителей числа  $2k$ ;  $B$  — множество корней уравнения  $x^2 - (2k+1)x + k^2 + k = 0$ ;  $C$  — множество всех нечетных чисел  $x$  таких, что  $3 \leq x \leq k+3$ .

**П1.22.** Найти  $A \cup B, A \cap B, A \cap B \cap C, (A \cup B) \cap C, A \setminus B$  и изобразить эти множества на координатной прямой, если:

$$A = [0; 3], B = (1; 5), C = (-2; 0);$$

$$A = (-\infty; 1], B = [1; +\infty), C = (0; 1);$$

$$A = [-3; 1], B = [2; +\infty), C = (-\infty; -2].$$

## Ответы, указания, решения

**T1.1.** Ответы: а) например,  $A$  — множество всех рациональных чисел,  $B$  — множество всех иррациональных чисел; б) любые два множества, для которых  $B \subseteq A$ .

**T1.2.** Пусть  $M = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ . Выберем число  $a$  такое, что  $0 < a < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ . Положим  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ , где  $X_i = (m_i - a; m_i + a)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Покажем, что для любой точки  $L = (l_1, l_2, \dots, l_n)$  из  $X$  верно  $\rho(M, L) < \varepsilon$ . Так как  $l_i \in (m_i - a; m_i + a)$ , то  $|l_i - m_i| < a$ ,  $(l_i - m_i)^2 < a^2$  и, следовательно,

$$\rho(M, L) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (m_i - l_i)^2} < \sqrt{na^2} = a\sqrt{n} < \varepsilon.$$

Утверждение доказано.

**T1.3.** Пусть  $M = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ . Положим  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ , где  $X_i = (m_i - \varepsilon; m_i + \varepsilon)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Покажем, что для любой точки  $L = (l_1, l_2, \dots, l_n)$  из  $N(M, \varepsilon)$  верно  $L \in X$ . Предположим противное: точка  $L \in N(M, \varepsilon)$ , но существует координата  $l_r$  такая, что  $l_r \notin X_r$ . Тогда  $|m_r - l_r| > \varepsilon$ ,  $(m_r - l_r)^2 > \varepsilon^2$  и, следовательно,

$$\rho(M, L) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (m_i - l_i)^2} \geq \sqrt{(m_r - l_r)^2} > \varepsilon,$$

что противоречит условию  $L \in N(M, \varepsilon)$ . Утверждение доказано.

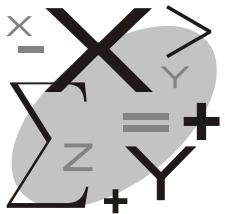
**T1.4.** Не всегда верно. Приведем контрпример. Пусть  $M \in Af^2$  и  $\varepsilon_2 < \frac{2\varepsilon_1}{\sqrt{\pi}}$ .

Предположим, что существует 2-мерный промежуток  $X$ , содержащий  $N(M, \varepsilon_1)$  и содержащийся в  $N(M, \varepsilon_2)$ . Очевидно,  $X$  — прямоугольник, стороны которого превосходят диаметр круга  $N(M, \varepsilon_1)$ . Поэтому площадь  $X$  больше  $4\varepsilon_1^2$ . С другой стороны, поскольку  $X$  содержится в круге  $N(M, \varepsilon_2)$ , то его площадь меньше  $\pi\varepsilon_2^2 < \frac{4\pi}{\pi}\varepsilon_1^2 = 4\varepsilon_1^2$ . Противоречие.

**П1.21.** В соответствии с условием задачи при  $k = 21$  получаем:  $A$  — множество всех делителей числа 42, т. е.  $A = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42\}$ ;  $B$  — множество корней уравнения  $x^2 - 43x + 20 \cdot 21 = 0$ , т. е.  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 21$ ,  $B = \{20, 21\}$ ;  $C$  — множество всех нечетных чисел  $x$  таких, что  $3 \leq x \leq 24$ , т. е.

$$C = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}.$$

Отсюда  $A \cup B = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42, 20\}$ ;  $B \cap C = \{21\}$ ;  $(A \cup B) \cap C = \{3, 7, 21\}$ ;  $C \setminus B = \{3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23\}$ .



## Глава 2

# Предел последовательности

Занумерованный бесконечный набор точек  $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots = \{M_k\}$  пространства  $Af^n$  будем называть последовательностью, а ее элементы  $M_k$  — точками или членами последовательности. Отметим, что последовательность  $\{M_k\}$  может содержать повторяющиеся члены и поэтому необязательно является множеством. Более того, в последовательности может быть лишь конечное число различных точек, как например, в последовательности  $\{(-1)^k\} = -1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots$ .

Говорят, что последовательность точек  $\{M_k\}$  пространства  $Af^n$  сходится к точке  $M$ , если, задав любую, сколь угодно малую, окрестность точки  $M$ , можно указать такую точку этой последовательности, что все следующие за ней члены последовательности окажутся в заданной окрестности. При этом точка  $M$  называется пределом последовательности  $\{M_k\}$ , что обозначается  $\{M_k\} \rightarrow M$  или  $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = M$ , а сама последовательность  $\{M_k\}$  называется сходящейся.

Говорят, что последовательность  $\{M_k\}$  сходится к бесконечности  $\infty$ , если в любой, сколь угодно большой, окрестности некоторой фиксированной точки  $M \in Af^n$  можно указать такую точку последовательности, что все следующие за ней члены последовательности окажутся вне заданной окрестности. Обозначается это так:  $\{M_k\} \rightarrow \infty$  или  $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = \infty$ .

Последовательность  $\{M_k\}$ , не имеющая конечного предела, называется расходящейся.

Последовательность называется ограниченной, если она целиком содержится в окрестности некоторой точки.

**Пример.** В одномерном пространстве  $Af^1$  точки естественно называть числами. Последовательность чисел  $\left\{\frac{1}{k}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  сходится к нулю. Действительно, если взять окрестность нуля радиусом  $\varepsilon$ , где  $\varepsilon = \frac{1}{10^i}$ ,  $i$  — произвольное натуральное число, то все члены последовательности  $\frac{1}{10^i + 1}, \frac{1}{10^i + 2}, \frac{1}{10^i + 3}, \dots$ , следующие за числом  $\frac{1}{10^i}$ , окажутся в этой окрестности.

**Пример.** Последовательность  $\{k\}$  сходится к бесконечности. Действительно, если взять окрестность нуля радиусом  $\varepsilon$ , где  $\varepsilon = 10^i$ ,  $i$  — произвольное натуральное число, то все члены последовательности  $10^i + 1, 10^i + 2, 10^i + 3, \dots$ , следующие за числом  $10^i$ , окажутся вне этой окрестности.

**Теорема 2.1.** Сходящаяся последовательность имеет единственный предел и является ограниченной.

**Доказательство.** Предположим, что последовательность  $\{M_k\}$  имеет два различных предела  $A$  и  $B$ . Положим  $\varepsilon = \frac{\rho(A, B)}{2}$ . Согласно определению предела, можно указать такую точку  $M_s(M_r)$ , что все следующие за ней члены последовательности  $M_{s+1}, M_{s+2}, \dots$  (соответственно  $M_{r+1}, M_{r+2}, \dots$ ) окажутся в окрестности с радиусом  $\varepsilon$  точки  $A$  (точки  $B$ ). В частности, если  $r \geq s$ , то  $\rho(M_{r+1}, A) < \varepsilon$ ,  $\rho(B, M_{r+1}) < \varepsilon$ . Но тогда в силу утверждения 1.1  $\rho(A, B) \leq \rho(A, M_{r+1}) + \rho(M_{r+1}, B) < 2\varepsilon = \rho(A, B)$ , что невозможно.

Пусть теперь  $\{M_k\} \rightarrow A$ . Тогда для произвольного  $\varepsilon > 0$  можно указать такую точку  $M_s$ , что все следующие за ней точки последовательности  $M_{s+1}, M_{s+2}, \dots$  окажутся в окрестности радиусом  $\varepsilon$  точки  $A$ . И если обозначить через  $d$  наибольшее из чисел  $\rho(A, M_1), \dots, \rho(A, M_s)$ ,  $\varepsilon$ , то очевидно, что все члены последовательности  $\{M_k\}$  окажутся в окрестности радиусом  $d$  точки  $A$ . Теорема доказана.

Перейдем теперь к более подробному рассмотрению числовых последовательностей. Подразумевается, что операции над ними выполняются поэлементно, а именно:  $c\{x_n\} = \{cx_n\}$ ,  $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$ ,

$$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n y_n\}, \quad \frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}.$$

**Теорема 2.2** (о переходе к пределу в равенствах). Если  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  — сходящиеся числовые последовательности,  $\alpha, \beta$  — произвольные константы, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n \pm \beta y_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \beta \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

(последнее равенство верно, если  $y_n \neq 0$  при любом  $n$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ ).

**Доказательство** теоремы дано в задаче Т2.1.

**Теорема 2.3** (о переходе к пределу в неравенствах). Пусть  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  — сходящиеся числовые последовательности. Тогда:

1) если  $x_n \leq y_n$  для любого натурального  $n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ;

2) если  $x_n \leq z_n \leq y_n$  для любого натурального  $n$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ , то числовая последовательность  $\{z_n\}$  также сходится к  $a$ .

**Доказательство** теоремы дано в задаче Т2.2.

Рассмотрим важный класс числовых последовательностей, для которых вопрос о существовании предела выясняется достаточно просто.

Числовая последовательность  $\{x_n\}$  называется возрастающей (убывающей), если для любого натурального  $n$  верно  $x_n \leq x_{n+1}$  (соответственно  $x_n \geq x_{n+1}$ ). Возрастающие и убывающие последовательности называются монотонными.

**Теорема 2.4** (критерий сходимости монотонной последовательности). Возрастающая (убывающая) числовая последовательность  $\{x_n\}$  сходится, если и только если  $\{x_n\}$  ограничена сверху (снизу), т. е. для любого натурального  $n$  верно  $x_n \leq M$  (соответственно  $x_n \geq M$ ), где  $M$  — фиксированное число.

**Доказательство.** Если последовательность  $\{x_n\}$  сходится, то она ограничена и сверху, и снизу. Предположим теперь, что  $\{x_n\}$  ограничена сверху числом  $M$ , и докажем сходимость  $\{x_n\}$ . Назовем число  $M$  верхней гранью набора чисел  $\{x_n\}$ . Очевидно,  $\{x_n\}$  имеет бесконечно много верхних граней, например,  $M + 1, M + 2, \dots$  Примем без доказательства тот факт, что среди всех верхних граней некоторого набора чисел всегда есть наименьшая. Обозначим через  $M_0$  наименьшую верхнюю грань последовательности  $\{x_n\}$ . Возьмем произвольное положительное число  $\varepsilon$ . Тогда

найдется такой член последовательности  $x_r$ , что  $x_r > M_0 - \varepsilon$  (в противном случае число  $M_0 - \varepsilon$  было бы верхней гранью последовательности  $\{x_n\}$ , что противоречит минимальности  $M_0$ ). Отсюда все члены  $x_n$  последовательности, следующие за  $x_r$ , также удовлетворяют неравенству  $x_n > M_0 - \varepsilon$ , т. е. для любого  $n \geq r$   $M_0 - \varepsilon < x_n < M_0 + \varepsilon$  или  $|x_n - M_0| < \varepsilon$ . Отсюда ввиду произвольности выбора  $\varepsilon$  и в соответствии с определением предела следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M_0$ . Теорема доказана.

Следствием теорем 2.3 и 2.4 является утверждение о сходимости последовательности  $\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$  (см. задачу Т2.8). Предел этой последовательности называется числом  $e$ . Число  $e$  иррационально, т. е. является бесконечной непериодической дробью  $e = 2.71828182845904\dots$  Более того, оно трансцендентно, т. е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами.

**Пример.** Вспомним известную формулу сложных процентов:

$$Q_n = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

где  $Q_0$  — первоначальное значение некоторой величины,  $p$  — процент, на который эта величина изменяется (увеличивается или уменьшается) за некоторый период времени,  $n$  — количество таких периодов времени.

Предположим теперь, что каждый период времени разбит еще на  $k$  равных периодов, общее количество которых равно  $kn$ . Естественно предположить, что процент, на который изменится наша величина в течение нового, более короткого, периода времени, уменьшится в  $k$  раз и станет равным  $\frac{p}{k}$ . Тогда по формуле сложных процентов имеем:

$$Q_{kn} = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100 \cdot k}\right)^{k \cdot n} = Q_0 \left( \left(1 + \frac{p}{100k}\right)^{\frac{100k}{p}} \right)^{\frac{p}{100} \cdot n} = Q_0 \left( \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right)^{\frac{pn}{100}},$$

$$\text{где } m = \frac{100k}{p}.$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q_{kn} = Q_0 \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m \right)^{\frac{pn}{100}} = Q_0 e^{\frac{pn}{100}} \approx Q_n.$$

Полученная приближенная формула называется формулой непрерывных процентов.

Пусть, например, темп инфляции составляет 1% в день. Определим, во сколько раз обесценится сумма  $Q_0$  через полгода. В данном случае  $p = -1$ ,  $n = 365 / 2 = 182.5$ . Воспользуемся формулой непрерывных процентов:  $Q \approx Q_0 \cdot e^{-\frac{182.5}{100}} = \frac{Q_0}{e^{1.825}} \approx \frac{Q_0}{6}$ , т. е. исходная сумма  $Q_0$  обесценится примерно в 6 раз.

## Компьютерный раздел

Подпанель **Арифметика** (Calculator), изображенная на рис. 2.1, вызывается кнопкой  панели **Математика** (Math) и содержит 35 кнопок.



Рис. 2.1. Подпанель Арифметика

Рассмотрим действия тех кнопок, которые могут понадобиться при решении компьютерных задач данной главы. Кнопки первого столбца вызывают шаблоны встроенных функций: синуса, косинуса, тангенса, натурального логарифма, десятичного логарифма. Например, щелчок на кнопке  вызовет шаблон **ln(*x*)** функции "логарифмирование по основ-

ванию  $e^n$ . Шаблон  $\boxed{!}$  для вычисления факториалов вызывается кнопкой  $\boxed{n!}$ . Шаблон  $\boxed{|}$  для вычисления модуля выражения (которое вводится на месте метки), вызывается кнопкой  $\boxed{|x|}$ . Шаблон  $\boxed{\sqrt{}}$  встроенной функции "извлечение квадратного корня" вызывается кнопкой  $\boxed{\Gamma}$ . Если алгебраическое выражение, из которого предполагается извлечь квадратный корень уже введено, то удобнее воспользоваться клавишей  $\langle \rangle$ , предварительно выделив слева все выражение синим курсором. Шаблон  $\boxed{\sqrt[n]{}}$  встроенной функции "извлечение корня  $n$ -й степени" вызывается кнопкой  $\boxed{\sqrt[n]{}}$ ; при этом на месте верхней метки вводится показатель корня, а на месте второй метки — выражение, из которого предполагается этот корень извлечь.

Подпанель **Матанализ** (Calculus), изображенная на рис. 2.2, вызывается кнопкой  $\boxed{\int \frac{dy}{dx}}$  панели **Математика** (Math) и содержит 12 кнопок.



Рис. 2.2. Подпанель Матанализ

Кнопка  $\boxed{\infty}$  вызывает знак бесконечности; кнопка  $\boxed{\prod_n}$  вызывает шаблон  $\prod$ .

Кнопка  $\boxed{\cdot \cdot \cdot}$  для записи произведения конечного числа сомножителей; кнопка  $\boxed{\sum_n}$  для записи суммы конечного числа слагаемых;

кнопка  $\boxed{\lim_{\rightarrow a}}$  вызывает шаблон  $\rightarrow$  для вычисления пределов последовательностей и функций; назначение остальных кнопок будет описано в последующих главах.

$$\sum \cdot \quad \prod \cdot$$

В шаблоне  $\rightarrow$  (или  $\rightarrow \cdot \cdot \cdot$ ) на месте левой нижней метки вводится имя переменной, по которой должно производиться суммирование (произ-

ведение), на месте правой нижней метки — начальное значение этой переменной, на месте верхней метки — ее конечное значение; на месте метки справа от знака  $\Sigma$  (или  $\Pi$ ) вводится аналитическое выражение слагаемого (сомножителя), зависящего от переменной, по которой производится суммирование (произведение).

Для символьных вычислений в Mathcad используется знак символьного вывода  $\rightarrow$ . Простейшим примером символьных вычислений является вычисление пределов.

Рассмотрим пример вычисления предела последовательности

$$\{x_n\} = \left\{ \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right\}.$$

В нужном месте рабочего листа щелчком левой кнопки мыши установите визир и щелчком кнопки подпанели **Матанализ (Calculus)** вызовите шаблон . На месте метки справа от знака  $\lim$  щелчком кнопки вызовите шаблон . На месте метки справа от знака  $\prod$  щелчком кнопки .

вызовите шаблон . На месте правой метки этого шаблона введите  $(i - 1)$ -й сомножитель  $\left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$ . Затем на месте соответствующих меток этого шаблона введите идентификатор переменной  $i$ , ее начальное значение  $2$  и ее конечное значение  $n$ . На месте двух нижних меток под знаком предела  $\lim$  введите номер  $n$ -го члена последовательности и символ  $\infty$ .

Комбинацией клавиш  $<\text{Ctrl}>+<\cdot>$  введите знак  $\rightarrow$  символьного вывода. После нажатия клавиши  $<\text{Enter}>$  справа от знака  $\rightarrow$  появится искомое значение предела, равное  $\frac{1}{2}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Отметим, что переход от метки к метке осуществляется с помощью клавиши  $<\text{Tab}>$ .

Помимо широкого набора стандартных функций, в Mathcad возможно определение собственных функций пользователя. Функция определяется следующим образом:

имя функции (аргументы) := формула

где имя функции — любой уникальный для данного документа идентификатор; аргументы — список аргументов функции через запятую; форму-

ла — любая формула с использованием констант, стандартных функций и функций пользователя. Пример цепочки формул с использованием функций пользователя приведен ниже:

```
a := 2      b := a2 + sin(a)      f(x) := x3 + 2 · x
c := f(a) + cos(b)      c = 12.196
g(x, y) := f(x + y)2 + y + x
d := a + b + f(a · b) + g(0.5, a)
d = 1.401 × 103
```

Отметим, что при формировании степенной функции перед вводом показателя этой функции с помощью клавиши <^> следует охватить правым синим уголком идентификатор функции вместе со всеми аргументами для того, чтобы операция возведения в степень указывалась после закрывающейся скобки, как это и было сделано в предыдущем примере. Однако в примере

```
f(x) := x2 + 4
a := 5.5 + f2(3)
```

получено не возведение в квадрат функции  $f(3)$ , а произведение квадрата некой переменной  $f$  на число 3. Подобная ошибка в Mathcad обнаруживается достаточно просто, т. к. числовое значение для переменной  $f$  не было задано выше в документе и поэтому  $f^2$  будет выделяться на рабочем листе красным цветом.

При определении функции можно использовать программные модули, что будет рассмотрено в последующих компьютерных разделах.

Зачастую результат символьного вычисления, однажды уже полученный в документе Mathcad, приходится неоднократно использовать в этом же документе. В подобных случаях целесообразно поступать следующим образом. Пусть некоторое выражение  $E$ , зависящее от  $n$  переменных (параметров)  $x_1, \dots, x_n$ , необходимо вычислить в символьном виде.

В нужном месте рабочего листа введите идентификатор функции с перечисленными в круглых скобках аргументами  $x_1, \dots, x_n$ , например,  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Затем клавишей <:> введите знак присваивания := из справа от него — выражение  $E$ , выделив затем это выражение синим курсором. Комбинацией клавиш <Ctrl>+<·> введите знак →. После нажатия клавиши <Enter> справа от знака → появится искомый символьный результат, к которому можно обращаться в дальнейших вычислениях посредством функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

Пусть в рассмотренном выше примере вместо начального значения переменной  $i$ , равного 2, задан параметр  $p$ . Введите последовательно  $f(p)$ , знак присваивания := и выражение  $E$ , которое в данном случае имеет вид  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$ . После ввода знака символьного вывода → и нажатия клавиши <Enter> на экране получим следующее:

$$f(p) := \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) \rightarrow \frac{p-1}{p}.$$

Теперь можно получать значения пределов для любых натуральных  $p$ , не прибегая каждый раз к повторному их вычислению. Так, например, если  $p$  пробегает все значения от 4 до 12 с шагом 2, то

$p := 4, 6 .. 18$

$f(p) =$

0.75
0.833
0.875
0.9
0.917
0.929
0.938
0.944

В данном примере использована так называемая ранжированная переменная  $p$ , принимающая значения из заданного промежутка  $[4;18]$  с равными интервалами (шагом изменения) длины 2. Опишем этот тип переменных в общем случае.

Пусть требуется определить ранжированную переменную  $rvari$  с начальным значением  $a$ , конечным значением  $b$  и с заданным шагом изменения  $h$ . В этом случае в нужном месте рабочего листа вводится имя переменной  $rvari$ , знак присваивания := и затем, через запятую, выражения  $a$  и  $a + h$ ; после этого клавишей <;> вводится знак .. и на месте появившейся метки вводится  $b$ . Если конечное значение  $b$  при заданном шаге  $h$  не достигается точно, то последним значением переменной в случае  $h > 0$  будет наибольшее возможное значение, не превышающее  $b$ , а в случае  $h < 0$  — наименьшее возможное значение, превышающее  $a$ . Выражение  $a + h$  можно опускать: в этом случае шаг по умолчанию равен 1 (если  $b$  больше  $a$ ) или  $-1$  (если  $b$  меньше  $a$ ).

# Задачи для самостоятельного решения

**T2.1.** Доказать теорему 2.2.

**T2.2.** Доказать теорему 2.3.

**T2.3.** Дано:  $\{x_n\}$  — числовая последовательность и  $\{x_n\} \rightarrow a$ . Доказать, что  $\{|x_n|\} \rightarrow |a|$ . Верно ли обратное утверждение?

**T2.4.** Подпоследовательностью последовательности  $\{M_k\}$  называется последовательность, полученная из  $\{M_k\}$  удалением конечного или бесконечного числа членов с сохранением порядка оставшихся членов. Доказать, что любая подпоследовательность сходящейся последовательности  $\{M_k\}$  сходится к той же точке, что и  $\{M_k\}$ .

**T2.5.** Дано: числовая последовательность  $\{x_n\}$  сходится к нулю, а числовая последовательность  $\{y_n\}$  ограничена. Доказать:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = 0$ .

**T2.6.** Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

а) если числовые последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  расходятся, то и последовательности  $\{x_n \pm y_n\}$ ,  $\{x_n \cdot y_n\}$ ,  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$  расходятся;

б) если  $\{x_n\}$  сходится, а  $\{y_n\}$  расходится, то  $\{x_n \pm y_n\}$ ,  $\{x_n \cdot y_n\}$ ,  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$  также расходятся.

**T2.7.** Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$ .

**T2.8.** Доказать сходимость последовательности  $\left\{ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ .

**T2.9.** Пусть последовательность  $\{M_k\}$  сходится к точке  $M$ . Доказать, что последовательность, полученная из  $\{M_k\}$  добавлением конечного числа членов с сохранением порядка членов первоначальной последовательности, также сходится к  $M$ .

## Общая формулировка задач П2.1–П2.21

Найти пределы последовательностей:

$$\text{П2.1. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}}.$$

$$\text{П2.3. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+9+\dots+3n}{n^2+4}.$$

$$\text{П2.5. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^{-n} + 5^{n+1}}{5+25+\dots+5^n}.$$

$$\text{П2.7. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n+1} \right)^{1+2n}.$$

$$\text{П2.9. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot n! - 5 \cdot (n-1)!}{4 \cdot n! - (n+1)!}.$$

$$\text{П2.11. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! - n^2 \cdot (n-2)!}{2 \cdot n! - (n-1)!}.$$

$$\text{П2.13. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2n-1} \right)^{n+2}.$$

$$\text{П2.15. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{4n^2+n-1} - 2n \right).$$

$$\text{П2.17. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{25n^2+n+4} - 5n \right).$$

$$\text{П2.19. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{n^4 + 3n^5 - 2}.$$

$$\text{П2.21. а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^3+8} \cdot \left( \sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3-1} \right) \right); \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{2n-3} \right)^{2-5n}.$$

$$\text{П2.2. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}.$$

$$\text{П2.4. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+\dots+2^n}{2^{n+2}+3^{-n}}.$$

$$\text{П2.6. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9+27+\dots+3^{n+1}}{2 \cdot 3^{n+2} + (-2)^n}.$$

$$\text{П2.8. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{2n-3}.$$

$$\text{П2.10. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - (n+2)!}{(n+5)! \cdot n! + (n+2)!}.$$

$$\text{П2.12. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! - 3 \cdot n!}{(n+1) \cdot (n-1)! + (n-2)!}.$$

$$\text{П2.14. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+4}{2n} \right)^{-2n}.$$

$$\text{П2.16. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n-1} \cdot \left( \sqrt{n+7} - \sqrt{n+1} \right) \right).$$

$$\text{П2.18. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2-1} \cdot \left( \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} \right) \right).$$

$$\text{П2.20. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 - 4n^3 + 2n - 3}{3n^6 + 5n^2}.$$

## Общая формулировка задач К2.1—К2.11

С помощью Mathcad вычислить пределы указанных последовательностей. Диапазоны изменения параметров  $p, q, r$  равны соответственно [2; 3], [3; 4], [2; 3], а шаг изменения равен 1 (в задачах К2.5—К2.11).

$$\mathbf{K2.1.} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + i}}.$$

$$\mathbf{K2.2.} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}.$$

$$\mathbf{K2.3.} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n (2i-1)^7}{n^8}.$$

$$\mathbf{K2.4.} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

$$\mathbf{K2.5.} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + pn + 2} - n \right).$$

$$\mathbf{K2.6.} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{i}{n^p} \right).$$

$$\mathbf{K2.7.} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+p)^{n+\frac{1}{n}}}{\left( n + \frac{1}{n} \right)^n}.$$

$$\mathbf{K2.8.} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{1}{n+p} \right)^{n^2}}{e^n}.$$

$$\mathbf{K2.9.} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \sin \left( \frac{pi}{n+1} \right)}{n}.$$

$$\mathbf{K2.10.} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \cos \left( \frac{(2i-1)q}{pn} \right)}{n}.$$

$$\mathbf{K2.11. a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(n+p)(n+q)(n+r)} - n; \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \left( \frac{p}{n} \right) + q \sin \left( \frac{r}{n^2} \right) \right)^{n^2}.$$

## Ответы, указания, решения

**T2.1.** Очевидно, в одномерном пространстве принадлежность числа  $x$  окрестности числа  $a$  с радиусом  $\varepsilon$  равносильна выполнению неравенства  $|x - a| < \varepsilon$ . Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ .

1) Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$ . Возьмем произвольное число  $\varepsilon > 0$ .

По определению предела последовательности, можно указать такие числа  $x_r$  и  $y_s$ , что все следующие за  $x_r$  числа  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots$  окажутся в окрестно-

сти точки  $a$  радиусом  $\frac{\varepsilon}{2}$ , а все следующие за  $y_s$  числа  $y_{s+1}, y_{s+2}, \dots$  окажутся в окрестности точки  $b$  радиусом  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда для каждого натурального  $n$ , большего  $\max\{r, s\}$ ,

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что по определению предела последовательности означает сходимость последовательности  $\{x_n + y_n\}$  к числу  $a + b$ .

2) Докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$ . В соответствии с теоремой 2.1, сходящаяся последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, т. е. существует такое число  $C > 0$ , что  $|x_n| < C$ . Положим  $M = \max\{C, |b|\}$ . Возьмем произвольное число  $\varepsilon > 0$ . По определению можно указать такие числа  $x_r$  и  $y_s$ , что все числа  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots$  и  $y_{s+1}, y_{s+2}, \dots$  окажутся соответственно в окрестностях точек  $a$  и  $b$  радиусом  $\frac{\varepsilon}{2M}$ . Тогда для каждого натурального  $n$ , большего  $\max\{r, s\}$ , верно

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| = |x_n (y_n - b) + b(x_n - a)| \leq |x_n (y_n - b)| + \\ &|b(x_n - a)| = |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| < C \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

что означает сходимость последовательности  $\{x_n y_n\}$  к числу  $ab$ .

Из доказанного выше следует, что для любых констант  $\alpha, \beta$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n \pm \beta y_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \beta \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha a + \beta b$ .

3) Докажем, что если  $b \neq 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ . Это равенство будет следовать

из равенства  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$  и уже доказанного свойства, касающегося произведения сходящихся последовательностей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( x_n \cdot \frac{1}{y_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Возьмем произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то, согласно определению предела, можно указать такое число  $y_s$ , что все числа  $y_{s+1},$

$y_{s+2}, \dots$  будут принадлежать окрестности  $N\left(b, \frac{\varepsilon b^2}{2}\right)$ . Можно также указать такое число  $y_r$ , что все числа  $y_{r+1}, y_{r+2}, \dots$  будут принадлежать окрестности  $N\left(b, \frac{|b|}{2}\right)$ . Последнее, в частности, означает, что модуль каждого из чисел  $y_{r+1}, y_{r+2}, \dots$  превосходит  $\frac{|b|}{2}$ . Отсюда для каждого натурального  $n$ , большего  $\max\{r, s\}$ , верно

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n| \cdot |b|} < \frac{\varepsilon b^2}{2|y_n| \cdot |b|} = \frac{\varepsilon |b|}{2|y_n|} < \varepsilon.$$

**T2.2.** 1) Пусть  $\{x_n\} \rightarrow a$ ,  $\{y_n\} \rightarrow b$ ,  $\{z_n\} = \{y_n - x_n\}$ ,  $c = b - a$ ,  $\varepsilon = \frac{|b - a|}{2}$ . Докажем, что  $c \geq 0$ . Предположим противное: пусть  $c < 0$ . По теореме 2.2  $\{z_n\} \rightarrow c$ . Поэтому найдется такой член  $z_r$  этой последовательности, что  $z_r \in N(c, \varepsilon)$ , отсюда  $z_r < c + \varepsilon = b - a + \frac{a - b}{2} = \frac{b - a}{2} < 0$ . Но по условию  $z_r \geq 0$ . Противоречие.

2) По аналогии с доказательством первого равенства теоремы 2.2 можно показать, что для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $n$ , что для каждого натурального  $i > n$  одновременно  $x_i \in N(a, \varepsilon)$  и  $y_i \in N(a, \varepsilon)$ . Но тогда и  $z_i \in N(a, \varepsilon)$ , поскольку  $x_i \leq z_i \leq y_i$ . Ввиду произвольности выбора  $\varepsilon$  это означает сходимость  $\{z_n\}$  к  $a$ .

**T2.3.** Предположим вначале, что  $a = 0$ . Тогда ввиду симметричности окрестности  $N(a, \varepsilon)$  относительно нуля, для любого числа  $\varepsilon > 0$   $x_n \in N(a, \varepsilon)$ , если и только если  $|x_n| \in N(0, \varepsilon)$ . Другими словами,  $\{x_n\} \rightarrow 0$ , если и только если  $\{|x_n|\} \rightarrow 0$ . Если  $a > 0$ ,  $0 < \varepsilon < a$  и  $x_n \in N(a, \varepsilon)$ , то  $x_n > a - \varepsilon > 0$  и, следовательно,  $|x_n| \in N(a, \varepsilon)$ . Поэтому из сходимости  $\{x_n\}$  к  $a$  следует сходимость  $\{|x_n|\}$  к  $a$ . Аналогично, если  $a < 0$ ,  $0 < \varepsilon < -a$  и  $x_n \in N(a, \varepsilon)$ , то  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon < 0$  и, следовательно,  $-a + \varepsilon > -x_n > -a - \varepsilon$ , т. е.  $|a| - \varepsilon < |x_n| < |a| + \varepsilon$ ,  $|x_n| \in N(|a|, \varepsilon)$ . Опять-таки, из сходимости  $\{x_n\}$  к  $a$  следует сходимость  $\{|x_n|\}$  к  $|a|$ .

При  $a \neq 0$  обратное утверждение не всегда верно: например, если  $x_n = (-1)^n$ .

**T2.4.** Пусть  $\{M_k\} \rightarrow M$ . Занумеруем члены последовательности, полученной из  $\{M_k\}$ , удалением конечного или бесконечного числа членов (с сохранением порядка следования) последовательными натуральными числами  $1, 2, 3, 4, \dots$  Обозначим полученную последовательность  $\{L_k\}$ . Поскольку порядок был сохранен, то каждый член  $L_i$  последовательности  $\{L_k\}$  совпадает с некоторым членом  $M_j$  исходной последовательности, причем  $j \geq i$ . Поэтому если точки  $M_{r+1}, M_{r+2}, \dots$  принадлежат  $N(M, \varepsilon)$ , то и точки  $L_{r+1}, L_{r+2}, \dots$  принадлежат  $N(M, \varepsilon)$ . Другими словами, сходимость  $\{M_k\}$  к  $M$  влечет сходимость  $\{L_k\}$  к той же точке  $M$ .

**T2.5.** Так как  $\{y_n\}$  ограничена, то для некоторого положительного числа  $M$   $|y_n| \leq M$  при любом натуральном  $n$ . Отсюда  $0 \leq |y_n x_n| \leq M|x_n|$  для любого натурального  $n$ . Из теоремы 2.3 имеем:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n y_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M|x_n| = M \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n y_n| = 0.$$

Следовательно, в силу утверждения задачи T2.3  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ .

**T2.6.** Если  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  — расходятся, то  $\{x_n \pm y_n\}$  может сходиться: например,  $\{x_n\} = \{n\}$ ,  $\{y_n\} = \{-n\}$ , или  $\{x_n\} = \{y_n\} = \{n\}$ . Если  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  — расходятся, то  $\{x_n y_n\}$  и  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$  могут сходиться. Например, если

$$\{x_n\} = \{y_n\} = \{(-1)^n\}, \text{ то } \{x_n y_n\} = \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} = \{1\}.$$

Если  $\{x_n\}$  сходится, а  $\{y_n\}$  расходится, то  $\{x_n \pm y_n\}$  расходится, а  $\{x_n y_n\}$  и  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$  могут как сходиться, так и расходиться. Действительно, предпо-

ложим, что последовательность  $\{z_n\} = \{x_n + y_n\}$  сходится. Тогда из сходимости последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{z_n\}$  (теорема 2.1) следует, что последовательность  $\{y_n\} = \{z_n - x_n\}$  тоже сходится. Противоречие.

Пусть  $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ ,  $\{y_n\} = \{n\}$ , тогда  $\{x_n y_n\} = \{1\}$  — сходится. Пусть  $\{x_n\} = \{1\}$ ,  $\{y_n\} = \{(-1)^n\}$ , тогда последовательность  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} = \{(-1)^n\}$  расходится.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T2.7.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + 1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\left(\pi\sqrt{n^2 + 1} - \pi n\right) + \pi n\right) = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)\right) = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin\left(\pi \frac{\left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)\left(\sqrt{n^2 + 1} + n\right)}{\sqrt{n^2 + 1} + n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin\left(\pi \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n}\right) = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n}\right).
 \end{aligned}$$

Поскольку  $\{(-1)^n\}$  — ограниченная последовательность, а последовательность  $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n}\right)\right\} \rightarrow 0$ , то последний предел равен нулю в силу утверждения задачи Т2.5.

**T2.8.** Пусть  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ . Воспользуемся известным неравенством Коши: для любых неотрицательных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k$  верно

$$\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}.$$

Положим  $k = n + 1$ ,  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{n+1}{n}$ ,  $a_{n+1} = 1$ . Тогда, согласно неравенству Коши,

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[n+1]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot 1} \leq \frac{n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + 1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Итак, доказано, что  $x_n \leq x_{n+1}$  для любого натурального  $n$ , т. е.  $\{x_n\}$  — возрастающая последовательность.

Положим теперь  $k = n + 2$ ,  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1} = \frac{n}{n+1}$ ,  $a_{n+2} = 1$ . Согласно неравенству Коши,

$$\sqrt[n+2]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} \cdot 1 \leq \frac{(n+1)\frac{n}{n+1} + 1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}.$$

Если обозначить  $y_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ , то последнее неравенство означает, что  $y_n \leq y_{n+1}$  для любого натурального  $n$ . В итоге имеем:

$$\frac{1}{4}x_n = y_1 x_n \leq y_n x_n \leq y_{n+1} x_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} < 1 \quad \text{для любого}$$

натурального  $n$ . Отсюда  $\frac{x_n}{4} < 1$ ,  $x_n < 4$ , что означает ограниченность последовательности  $\{x_n\}$ . Сходимость этой последовательности следует теперь из теоремы 2.4.

**T2.9.** Указание: воспользоваться определением предела последовательности.

$$\begin{aligned} \text{П2.21. а)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 + 8} \cdot \left( \sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 + 8} \cdot \left( \sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 - 1} \right) \times \\ & \times \frac{\sqrt{n^3 + 2} + \sqrt{n^3 - 1}}{\sqrt{n^3 + 2} + \sqrt{n^3 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 + 8} \cdot \frac{n^3 + 2 - n^3 + 1}{\sqrt{n^3 + 2} + \sqrt{n^3 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \frac{\sqrt{n^3 + 8}}{\sqrt{n^3 + 2} + \sqrt{n^3 - 1}} = \\ & = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 8}}{\sqrt{n^3}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{8}{n^3}}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^3}}} = 3 \frac{\sqrt{1 + 0}}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 - 0}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{2n-3} \right)^{2-5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2n}{2n-3} - 1 \right)^{2-5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{2n-3} \right)^{\frac{2n-3}{3} \cdot \frac{3}{2n-3} (2-5n)} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{3}{2n-3} \right)^{\frac{2n-3}{3}} \right)^{\frac{6-15n}{2n-3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6-15n}{2n-3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{n}-15}{2-\frac{3}{n}}} = e^{-\frac{15}{2}}. \end{aligned}$$

**K2.11. б)** Приведем алгоритм решения задачи с помощью Mathcad:

$$f(p, q, r) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos\left(\frac{p}{n^1}\right) + q \cdot \sin\left(\frac{r}{n^2}\right) \right)^{n^2} \rightarrow \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot p^2 + q \cdot r\right)$$

ORIGIN := 1

$p := 2 \dots 3$        $q := 3 \dots 4$        $r := 2 \dots 3$

$f(p, q, r) =$

	1
1	54.598
2	4.482
3	403.429
4	33.115
5	$1.097 \cdot 10^3$
6	90.017
7	$2.203 \cdot 10^4$
8	$1.808 \cdot 10^3$

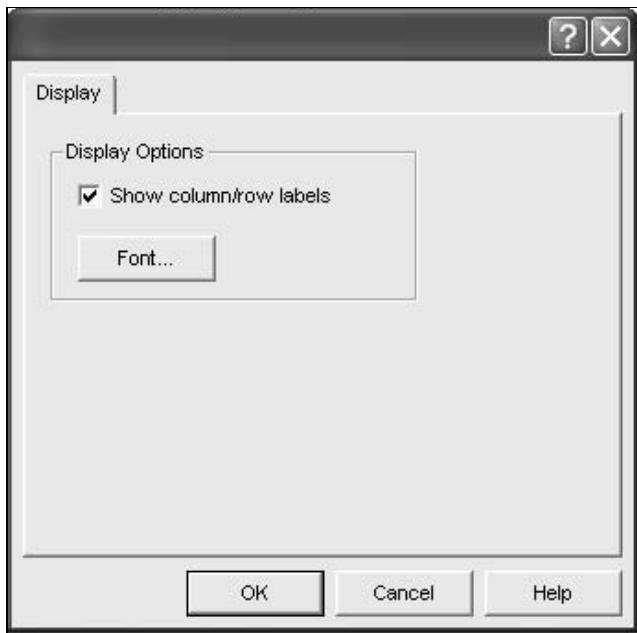
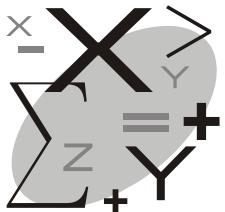


Рис 2.3. Диалоговое окно Display

Для того чтобы строки в таблице значений функции  $f(p, q, r)$ , выведенной после знака равенства, были занумерованы, щелкните правой кнопкой мыши на любом элементе таблицы и в выпадающем меню выберите команду **Properties** (Свойства); эта команда выводит диалоговое окно **Display** (Презентация), показанное на рис. 2.3, в котором следует отметить опцию **Show column/row labels** (Показать метки столбцов/строк).

Для задания начала нумерации строк таблиц с единицы необходимо задать единичное значение для системной переменной **ORIGIN** (эта переменная детально описана в компьютерном разделе гл. 5).



## Глава 3

# Предел функции

Рассмотрим в пространстве  $Af^n$  множество  $X$  и последовательность  $\{M_k\}$ , сходящуюся к точке  $M$ . Если все точки из  $\{M_k\}$  принадлежат множеству  $X$ , то возникает вопрос о том, как взаимосвязаны точка  $M$  и множество  $X$ . Чтобы ответить на этот вопрос, разобьем все сходящиеся к  $M$  последовательности на два класса: не содержащие  $M$  (назовем их регулярными) и содержащие точку  $M$  хотя бы одним из своих членов (назовем их нерегулярными).

Точку  $M$  назовем предельной точкой множества  $X$ , если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из  $X$ . Предельная точка множества  $X$  может как принадлежать, так и не принадлежать  $X$ . Множество, содержащее все свои предельные точки, называется замкнутым. Если точка  $M$  принадлежит множеству  $X$ , но некоторая ее окрестность не содержит точек из  $X$ , отличных от  $M$ , то  $M$  назовем изолированной в  $X$ .

**Примеры.** Если  $X$  состоит из конечного числа точек, то такое множество не может иметь предельных точек по определению; в то же время любая его точка является изолированной в  $X$ . Если  $X \subset Af^1$  — множество рациональных чисел, то каждая точка пространства  $Af^1$  является предельной точкой множества  $X$ , хотя ни одна точка из  $X$  не является изолированной в  $X$ .

**Теорема 3.1.** Пусть даны множество  $X \subseteq Af^n$  и точка  $M \in Af^n$ . Точка  $M$  является предельной точкой множества  $X$ , если и только если существует сходящаяся к  $M$  регулярная последовательность точек из  $X$ . Точка  $M$  является изолированной в  $X$ , если и только если все сходящиеся к  $M$  последовательности точек из  $X$  нерегулярны.

**Доказательство.** Предположим, что  $M$  — предельная точка множества  $X$ . Выберем произвольную числовую последовательность  $\varepsilon_k$  различных положительных чисел, сходящуюся к нулю. Так как любая окрестность  $N(M, \varepsilon_k)$  содержит бесконечное число точек из  $X$ , то в каждом множестве

$N(M, \varepsilon_k) \cap X$  можно выбрать точку  $M_k$ , отличную от  $M$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Из  $\{\varepsilon_k\} \rightarrow 0$  следует  $\{M_k\} \rightarrow M$ , причем  $\{M_k\}$  — регулярная последовательность.

Предположим теперь, что  $\{M_k\}$  — регулярная последовательность точек из  $X$ , сходящаяся к  $M$ , но при этом  $M$  не является предельной точкой множества  $X$ . Последнее означает существование окрестности  $N(M, \varepsilon)$ , в которой может оказаться конечное или пустое множество точек из  $X$ . Если в этой окрестности нет точек из  $X$  (помимо точки  $M$ , возможно принадлежащей  $X$ ), то положим  $\delta = \varepsilon$ . В противном случае выберем среди них отличную от  $M$  точку  $L$ , ближайшую к  $M$ , и положим  $\delta = \rho(M, L)$ . Очевидно, что окрестность  $N(M, \delta)$  не содержит точек из  $X$  (кроме точки  $M$ , возможно принадлежащей  $X$ ) и, следовательно, не содержит точек последовательности  $\{M_k\}$ , что противоречит сходимости  $\{M_k\}$  к  $M$ .

Из этих рассуждений также следует, что если  $M$  — изолированная в  $X$ , то любая сходящаяся к ней последовательность точек из  $X$  нерегулярна. Одной из таких последовательностей, например, является последовательность  $M, M, \dots, M, \dots$

Осталось рассмотреть случай, когда все сходящиеся к  $M$  последовательности точек из  $X$  нерегулярны. Пусть  $\{M_k\}$  — одна из них. Точка  $M$  не может быть предельной (иначе существовала бы регулярная последовательность, сходящаяся к  $M$ ). Поэтому, как было уже показано выше, существует окрестность  $N(M, \delta)$ , не содержащая точек из  $X$  и, следовательно, точек из  $\{M_k\}$ , отличных от  $M$ . Это означает, что  $\{M_k\} = M_1, \dots, M_r, M, M, \dots, M, \dots$  Отсюда  $M \in X$  и, следовательно,  $M$  — изолированная точка в  $X$ . Теорема доказана.

Из этой теоремы, в частности, следует, что существование сходящихся к  $M$  последовательностей точек из  $X$  означает, что  $M$  является либо предельной точкой множества  $X$ , либо изолированной в  $X$ . Из доказательства также следует, что для любой последовательности точек из  $X$ , сходящейся к изолированной в  $X$  точке  $M$ , можно всегда указать такую ее точку, что все следующие за ней члены последовательности будут совпадать с  $M$ .

Пусть заданы множества  $X \subseteq Af^n$ ,  $Y \subseteq Af^l$  и некоторое правило  $f$ , по которому каждой точке  $M = (x_1, \dots, x_n)$  из  $X$  ставится в соответствие некоторое число  $y$  из  $Y$ . Число  $y$  называется образом точки  $M$ , а точка  $M$  — прообразом числа  $y$ . Пусть, к тому же, правило  $f$  таково, что каждая точка из  $X$  имеет ровно один образ и каждое число из  $Y$  — хотя бы один прообраз. Тогда соответствие  $X \xrightarrow{f} Y$ , обозначаемое также  $y = f(M)$  или  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ , называется функцией  $f$   $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  с областью

стью определения  $X = D(f)$  и областью значений  $Y = E(f)$ . Координаты  $x_1, \dots, x_n$  называются независимыми переменными или аргументами функции  $f$ ,  $y$  — зависимой переменной.

**Примеры.** Пусть дан прямоугольник со сторонами  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда площадь этого прямоугольника  $S = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$  является функцией двух переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

Функцию можно задать графически: на рис. 3.1 показан график некоторой функции одной переменной  $y = f(x)$ ; при этом  $D(f) = [3; 7]$ ,  $E(f) = [1; 3]$ , значения функции  $f$  в точках 4, 6 равны 2 ( $f(4) = f(6) = 2$ ).

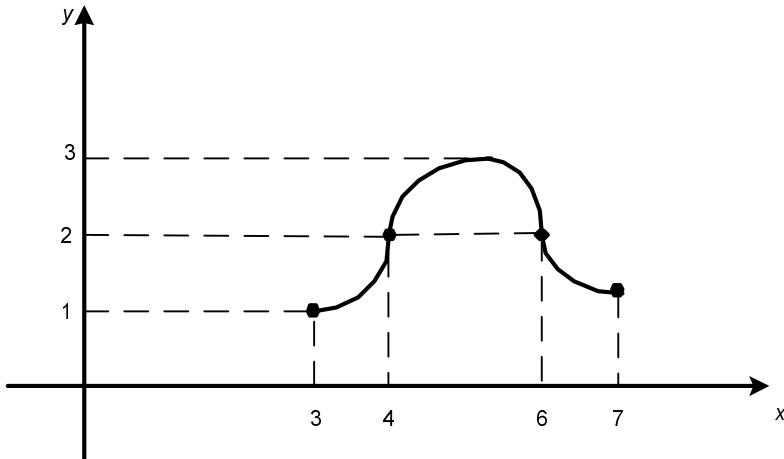


Рис. 3.1. График функции  $y = f(x)$

Здесь разные точки из области определения  $D(f)$  могут иметь совпадающие образы (например, точки  $x = 4$  и  $x = 6$ ), в то же время у каждой точки из  $D(f)$  ровно один образ.

Дадим определение предела функции. Пусть даны множество  $X \subseteq Af^n$  и точка  $M_0 \in Af^n$ . Пусть также задана функция  $f$ , определенная в каждой точке множества  $X$ . Если  $M_0$  является предельной точкой множества  $X$  (или  $M_0$  является изолированной точкой в  $X$ ), то число  $a$  называется пределом функции  $f$  в точке  $M_0$  вдоль  $X$ , если для любой сходящейся к  $M_0$  регулярной (соответственно нерегулярной) последовательности  $\{M_k\}$  точек из  $X$  соответствующая последовательность  $\{f(M_k)\}$  значений функции  $f$  сходится к  $a$ .

Обозначается это так:

$$\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in X}} f(M) = a \text{ или } f(M) \rightarrow a \text{ при } M \rightarrow M_0 \text{ вдоль } X.$$

Число  $a$  называется пределом функции  $f$  на бесконечности вдоль  $X$ , если для любой сходящейся к  $\infty$  последовательности  $\{M_k\}$  точек из  $X$  соответствующая последовательность  $\{f(M_k)\}$  значений функции  $f$  сходится к числу  $a$ . Обозначается это так:

$$\lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ M \in X}} f(M) = a \text{ или } f(M) \rightarrow a \text{ при } M \rightarrow \infty \text{ вдоль } X.$$

В свете теоремы 3.1 ясно, почему в этом определении точка  $M_0$  должна быть либо предельной точкой множества  $X$ , либо изолированной в  $X$ . Кроме того, в определении предела функции в предельной точке  $M_0$  учитываются только регулярные последовательности, сходящиеся к  $M_0$ . Поэтому предел функции в этом случае не зависит от поведения функции в самой точке  $M_0$ , даже если  $M_0 \in X$ . Отметим также, что предел функции  $f$  в точке  $M_0$  вдоль  $X$  всегда равен  $f(M_0)$ , в случае, когда  $M_0$  — изолированная в  $X$  точка (см. комментарии к теореме 3.1).

В определении предела функции фраза "вдоль  $X$ " означает, что предел функции чувствителен только к тому, как ведет себя функция именно "со стороны  $X$ ". Очевидно, если  $M_0$  имеет окрестность, целиком содержащуюся в  $X$  (за исключением, быть может, самой точки  $M_0$ ), т. е.  $X$  "окружает"  $M_0$ , то для произвольной сходящейся к  $M_0$  последовательности, все ее точки, начиная с некоторой, окажутся во множестве  $X$ , и фраза "вдоль  $X$ " в этой ситуации становится избыточной. В таких случаях можно использовать упрощенное обозначение предела:  $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$ .

Рассмотрим пример функции одной переменной  $y = f(x)$ , заданной на промежутке  $X = <a; b>$ . В случае  $x_0 = a$  предел функции  $f$  в точке  $x_0$  вдоль  $X$  известен также как правый предел функции  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ; в случае  $x_0 = b$  предел функции  $f$  в точке  $x_0$  вдоль  $X$  известен

как левый предел функции  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

Если  $X = <a; +\infty)$ , то предел функции  $f$  на бесконечности вдоль  $X$  обозначается  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ; если  $X = (-\infty; b>$ , то предел функции  $f$  на бесконечности вдоль  $X$  обозначается  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ; если  $X = (-\infty; +\infty)$ , то предел функции  $f$  на бесконечности вдоль  $X$  обозначается  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

По аналогии с последовательностями множество точек в  $Af^n$  называется ограниченным, если оно целиком содержится в окрестности некоторой точки. В гл. 5 понадобится следующее утверждение, которое приводится здесь без доказательства.

**Утверждение 3.1.** Любое бесконечное ограниченное множество точек в  $Af^n$  имеет хотя бы одну предельную точку.

**Теорема 3.2** (арифметика пределов). Пусть  $f(M)$  и  $g(M)$  определены на множестве  $X \subseteq Af^n$ ,  $M_0$  — предельная точка множества  $X$ .

Если пределы  $\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in X}} f(M)$ ,  $\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in X}} g(M)$  существуют, то для произволь-

ных чисел  $\alpha$  и  $\beta$

$$\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in X}} (\alpha f(M) \pm \beta g(M)) = \alpha \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in X}} f(M) \pm \beta \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in X}} g(M),$$

$$\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in X}} (f(M) \cdot g(M)) = \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in X}} f(M) \cdot \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in X}} g(M), \quad \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in X}} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in X}} f(M)}{\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in X}} g(M)}$$

(последнее равенство верно, если  $\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in X}} g(M) \neq 0$  и  $g(M) \neq 0$  для  $M \in X$ ).

Доказательство теоремы дано в задаче Т3.1.

Пусть функция  $\alpha(M)$  определена на множестве  $X \subseteq Af^n$ ,  $M_0$  — предельная точка множества  $X$ . Функция  $\alpha(M)$  называется бесконечно малой (сокращенно б. м.) в точке  $M_0$  вдоль  $X$ , если ее предел в точке  $M_0$  вдоль  $X$  равен нулю. Если  $\lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ M \in X}} \alpha(M) = 0$ , то  $\alpha(M)$  называется б. м. на бесконечности.

$$\lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ M \in X}}$$

Функция  $\alpha(M)$  называется бесконечно большой в точке  $M_0$  вдоль  $X$ , если обратная ей функция  $\frac{1}{\alpha(M)}$  определена на  $X$  и является б. м. в точке  $M_0$  вдоль  $X$ .

Если  $\alpha(M)$  и  $\beta(M)$  — б. м. в точке  $M_0$  вдоль  $X$  и  $\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in X}} \frac{\alpha(M)}{\beta(M)} = 0$ , то будем

говорить, что б. м.  $\alpha(M)$  более высокого порядка малости в точке  $M_0$  вдоль  $X$ , чем б. м.  $\beta(M)$ ; этому факту будет соответствовать запись:  $\alpha(M) = o(\beta(M))$  при  $M \rightarrow M_0$  вдоль  $X$ .

**Следствие 3.1** (арифметика бесконечно малых).

1. Сумма, разность и произведение двух б. м. в точке  $M_0$  вдоль  $X$  также является б. м. в точке  $M_0$  вдоль  $X$ .
2. Если  $\alpha(M)$  является б. м. в точке  $M_0$  вдоль  $X$ , а множество значений функции  $g(M)$  на множестве  $X$  ограничено, то  $\alpha(M) \cdot g(M)$  также является б. м. в точке  $M_0$  вдоль  $X$ .

Доказательство следствия дано в задаче Т13.1.

О поведении частного двух б. м. в точке  $M_0$  в общем случае нельзя сказать ничего определенного. Например, функции  $x^2$ ,  $x$ ,  $|x|$  являются б. м. в нуле. Однако  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty$ , а предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  вообще не существует (см. задачу Т3.6). Поэтому говорят, что отношение двух б. м. в точке  $x_0$  представляет собой в этой точке неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ .

Аналогично сумма, разность и частное двух бесконечно больших в точке  $M_0$  не обязательно являются бесконечно большими в этой точке. Напри-

мер,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$ . Поэтому в этих случаях говорят о неопре-

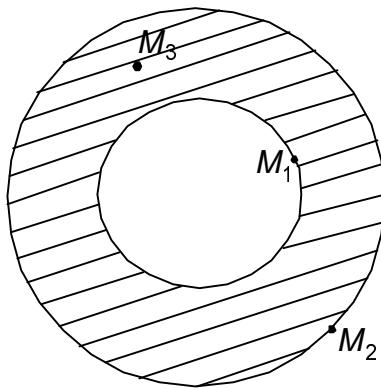
деленностях типа  $\infty \pm \infty$  и  $\frac{\infty}{\infty}$ . Неопределенностью типа  $0 \cdot \infty$  является и

произведение б. м. и бесконечно большой. Вычисление пределов в подобных ситуациях называется раскрытием неопределенностей.

Пусть даны множества  $X \subseteq Af^n$ ,  $Y = Af^n \setminus X$  и точка  $M \in Af^n$ .  $M$  называется внутренней точкой множества  $X$ , если она содержится в  $X$  вместе с некоторой своей окрестностью. Точка  $M$  называется выколотой из множества  $X$ , если  $M \notin X$  и некоторая ее окрестность без точки  $M$  целиком содержится в  $X$ .  $M$  называется граничной точкой множества  $X$ , если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек, как принадлежащих, так и не принадлежащих множеству  $X$ .

Очевидно, точка  $M$  одновременно является (или нет) граничной точкой обоих множеств  $X$  и  $Y$ .

Пример бесконечного ограниченного множества точек показан на рис. 3.2 в виде заштрихованной области. На этом же рисунке изображены две граничные точки  $M_1$  и  $M_2$  и одна внутренняя точка  $M_3$ .



**Рис. 3.2.** Пример бесконечного ограниченного множества

**Теорема 3.3** (топологическая классификация предельных точек).

Пусть даны множество  $X \subseteq Af^n$  и точка  $M \in Af^n$ .  $M$  является предельной точкой множества  $X$ , если и только если она является либо внутренней, либо граничной точкой множества  $X$ , либо выколотой из множества  $X$ .

Доказательство теоремы дано в задаче Т3.2.

## Компьютерный раздел

Подпанель **Матанализ** (Calculus), изображенная на рис. 2.2, содержит кнопки  $\lim_{\rightarrow a^+}$  и  $\lim_{\rightarrow a^-}$  для вычисления левого и правого пределов функции одной переменной. Эти кнопки вызывают, соответственно, шаблоны  $\lim_{\rightarrow a^+}$  и  $\lim_{\rightarrow a^-}$ . На месте метки справа от знака  $\lim$  вводится аналитическое выражение функции, на месте двух нижних меток вводятся аргумент функции и точка, в которой вычисляется предел.

Напомним, что имена переменных, функций и их аргументов называются идентификаторами. Идентификаторы в Mathcad могут иметь практически любую длину. Они состоят из символов, каждый из которых может быть буквой (в том числе и греческой), а также цифрой. При этом первым символом должна быть буква. Допускаются и некоторые специальные символы, например, знак подчеркивания \_. Строчные и прописные буквы различаются. Идентификаторы должны быть уникальными, т. е. они не должны совпадать с именами встроенных функций и функций, определенных пользователем. В Mathcad идентификатор может содержать подстрочные символы, т. е. в нем некоторые последние символы,

являющиеся составной частью этого идентификатора, могут быть набраны в виде "нижних индексов". Перед вводом подстрочных символов необходимо нажать клавишу  $<.>$ . Визуально идентификаторы с подстрочными символами почти не отличаются от индексированных координат  $n$ -мерных точек. Важно помнить, что перед вводом индексов координат точек или элементов матриц нажимается клавиша  $<[>$ .

При проведении сложных расчетов приходится комбинировать символьные вычисления с обычными. В этом случае возникает нежелательная ситуация, когда в символьное выражение преждевременно подставляется присвоенное переменной значение:

$$y := 2 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 \cdot y \rightarrow 18$$

Чтобы этого избежать, необходимо непосредственно перед символьным вычислением переопределить этот идентификатор, как это показано ниже:

$$y := 2 \quad y := y$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 \cdot y \rightarrow 9 \cdot y$$

$$a := y + 1 \quad a = 3$$

$$(a - b)^2 \rightarrow (y + 1 - b)^2$$

Как видно из этого примера, переменная  $y$  сохраняет свое значение 2. Сохраняет она и свою "способность" участвовать в дальнейших символьных вычислениях: в выражении  $(a - b)^2$  вместо переменной  $a$  подставляется ее символьное выражение  $y + 1$ , а не числовое значение 3.

Форматирование формульных блоков осуществляется командой **Equation** выпадающего меню **Форматирование** (Format) (рис. 3.3). Эта команда вызывает диалоговое окно **Equation Format**, содержащее раскрывающийся список **Style Name** с именами стилей **Variables**, **Constant**, **User1**, **User2**, **User3**, **User4**, **User5**, **User6**, **User7** (рис. 3.4).

Кнопка **Modify** вызывает диалоговое окно с каталогом шрифтов и вариантами их начертания, размера и цвета.

Существуют два способа форматирования модульных блоков: совместное и индивидуальное форматирование. Стиль **Variables** (Переменные) используется для совместного форматирования идентификаторов всех переменных и функций Mathcad-документа; стиль **Constant** (Константа) — для совместного форматирования всех констант Mathcad-документа. Остальные стили служат для индивидуального форматирования: для этого достаточно щелкнуть на соответствующем идентификаторе или константе и в раскрывающемся списке панели **Форматирование** (Formatting) вы-

брать нужный стиль. Индивидуальное форматирование имеет приоритет перед совместным в том смысле, что любые последующие изменения стилей **Variables** и **Constant** не затронут идентификаторов и констант, отформатированных индивидуально.

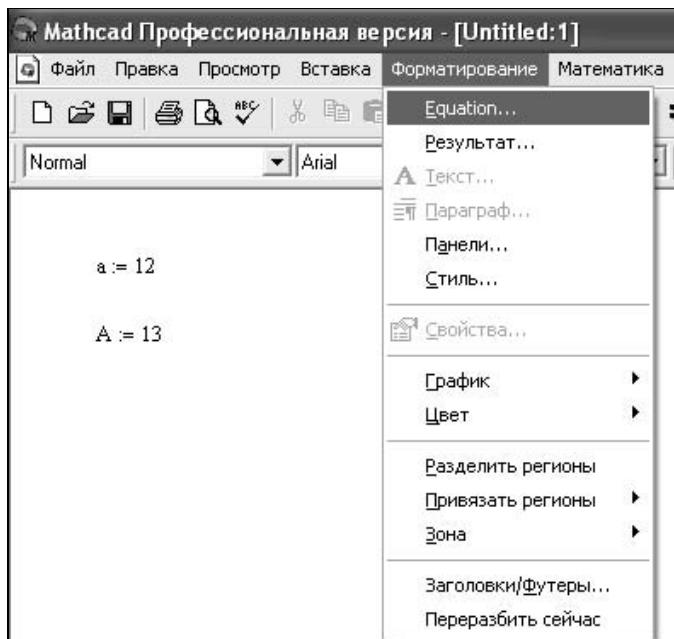


Рис. 3.3. Команда **Equation** меню **Форматирование** (Format)

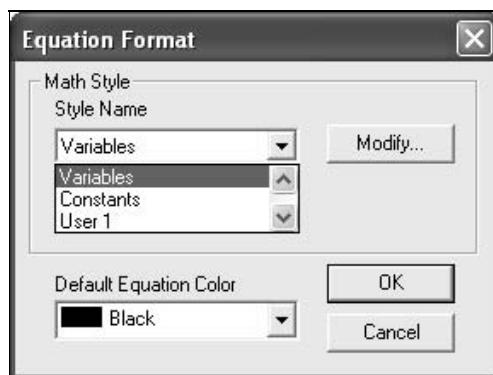


Рис. 3.4. Диалоговое окно **Equation Format**