ГЛАВА 2

Человек, который обуздал бесконечность

Примерно через двести лет после того, как Зенон задумался о природе пространства, времени, движения и бесконечности, еще один мыслитель счел бесконечность неотразимой. Его звали Архимед [1]. Мы уже встречались с ним, когда говорили о площади круга, но он легендарен и по многим другим причинам.

Начнем с того, что о нем ходит много забавных историй [2]. В некоторых он предстает этаким чудаком-математиком. Например, историк Плутарх рассказывает [3], что Архимед настолько увлекался геометрией, что «забывал о пище и уходе за телом»*[4]. (Это определенно верно. Для многих из нас, математиков, еда и личная гигиена не входят в список приоритетов.) Из-за этого, как говорит Плутарх, ученого даже насильно заставляли принимать ванну [5]. Забавно, что он занимался этим с такой неохотой, учитывая, что именно с купанием связана история, которую знают все. По словам римского архитектора Витрувия [6], Архимед был настолько возбужден внезапным озарением во время купания, что выскочил из ванны и побежал голышом по улице, крича: «Эврика!» («Нашел!»).

Другие истории рисуют его магом военного искусства, воином-ученым — настоящим отрядом смерти из одного человека. Согласно этим легендам, когда его родной город Сиракузы в 212 году

* Плутарх. Сравнительные жизнеописания. Марцелл. Перевод С. П. Маркиша. *Прим. пер.*

до нашей эры осадили римляне, Архимед — к тому времени уже почти 70-летний старик — помогал защищать город, применяя свои знания о рычагах и блоках для создания фантастического оружия — «боевых машин», таких как крюки и гигантские краны, которые поднимали римские корабли из воды и стряхивали с них моряков, как вытряхивают песок из обуви. Плутарх описывал эту ужасающую сцену так: «Нередко взору открывалось ужасное зрелище: поднятый высоко над морем корабль раскачивался в разные стороны до тех пор, пока все до последнего человека не оказывались сброшенными за борт или разнесенными в клочья, а опустевшее судно разбивалось о стену или снова падало на воду, когда железные челюсти разжимались»* [7].

Если говорить о более серьезных вещах, то все школьники и инженеры помнят закон Архимеда (на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной жидкости) и закон рычага (предметы на противоположных плечах рычага уравновешиваются, если их массы обратно пропорциональны расстояниям от точки опоры). Обе идеи имеют бесчисленные практические приложения. Закон Архимеда объясняет, почему одни объекты плавают, а другие — нет. Он также лежит в основе теории кораблестроения, теории остойчивости судов и проектирования морских нефтебуровых платформ. А принцип рычага вы, сами того не сознавая, применяете каждый раз, когда используете ножницы для ногтей или лом.

Возможно, Архимед был потрясающим конструктором боевых машин и, несомненно, блестящим ученым и инженером, но по-настоящему в пантеон великих его вводят достижения в математике. Он проложил путь к интегральному исчислению. Глубочайшие идеи, содержащиеся в его работах, больше не встречались почти два тысячелетия. Сказать, что он опередил

* Плутарх. Сравнительные жизнеописания. Марцелл. Перевод С. П. Маркиша. *Прим. пер.*

свое время, — значит ничего не сказать. Кто-нибудь опережал свое время *настолько*?

В работах ученого постоянно появляются две стратегии. Первая — активное использование принципа бесконечности. Чтобы изучать загадки кругов, сфер и прочих криволинейных форм, Архимед всегда аппроксимировал их с помощью прямолинейных форм, состоящих из прямых и кусков плоскостей, похожих на грани драгоценных камней. Воображая все большее количество частей и делая их все меньше по размеру, он подгонял свои приближения все ближе к истине, подходя к пределу с бесконечным количеством частей. Такая стратегия требовала филигранного обращения с суммами и головоломками, поскольку для получения своих выводов ему приходилось складывать множество чисел и частей.

Вторая примечательная стратегия — сочетание математики с физикой, идеального с реальным. В частности, он объединял геометрию, науку о формах, с механикой, изучающей движение и силы. Иногда он использовал геометрию, чтобы пролить свет на механику; иногда ход мыслей бывал обратным — механические соображения рождали идеи для чистых форм. Искусно используя обе стратегии, Архимед смог глубоко проникнуть в тайну кривых.

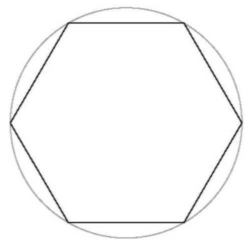
Поимка числа π

Когда я иду на работу или гуляю вечером с собакой, шагомер в моем iPhone отслеживает пройденное расстояние. Вычисления просты: приложение оценивает длину шага, исходя из моего роста, считает количество сделанных шагов, а затем перемножает эти два числа. Пройденное расстояние равно длине шага, умноженной на количество шагов.

Архимед использовал аналогичную идею для вычисления длины окружности и оценки числа π [8]. Представьте, что окружность — это дорожка для ходьбы. Путь будет выглядеть примерно так:

Каждый шаг представлен коротким отрезком. Умножив число шагов на длину одного отрезка, мы можем оценить длину пути. Конечно, это всего лишь оценка, потому что окружность на самом деле состоит не из прямых отрезков, а из дуг. Заменяя каждую дугу отрезком, мы слегка сокращаем путь. Поэтому такое приближение *занижает* реальную длину круговой дорожки. Но, по крайней мере теоретически, сделав достаточно большое количество достаточно маленьких шагов, мы можем приблизить длину дорожки с желаемой точностью.

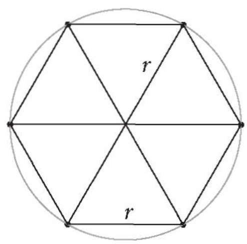
Архимед проделал ряд подобных вычислений, начав с пути из шести шагов, то есть с правильного шестиугольника*.



* Автор называет многоугольником и замкнутую ломаную из нескольких точек и соединяющих их отрезков, и плоскую фигуру, которая ограничена такой ломаной. *Прим. пер.*

Это был удобный базовый лагерь перед штурмом более сложных вычислений. Преимущество шестиугольника в том, что его периметр — сумму длин всех шести сторон — вычислить очень просто. Он в шесть раз больше радиуса круга. Почему? Потому что шестиугольник состоит из шести равносторонних треугольников, длина сторон которых равна радиусу круга.

Шесть сторон таких треугольников образуют периметр шестиугольника.



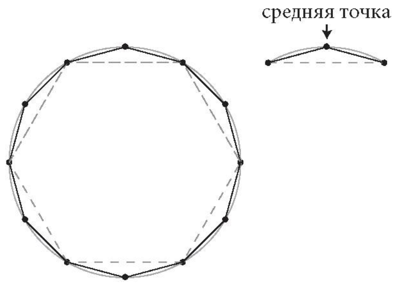
Получается, периметр в шесть раз больше радиуса, то есть $p = 6r$. Тогда, поскольку длина окружности C больше, чем периметр шестиугольника p, должно выполняться $C > 6r$.

Это рассуждение дало Архимеду нижнюю границу для числа, которое мы называем *пи*, обозначаем греческой буквой π и определяем как отношение длины окружности к ее диаметру. Так как диаметр d равен $2r$, то из неравенства $C > 6r$ следует:

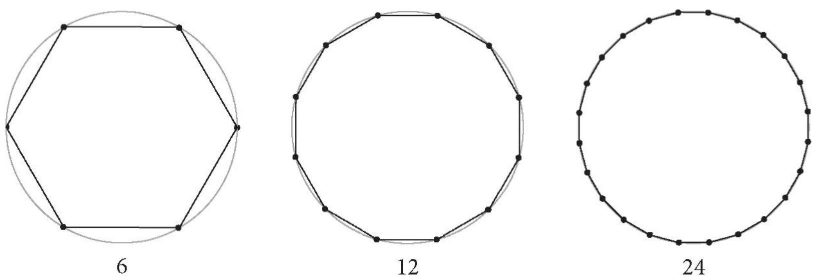
$$\pi = \frac{C}{d} = \frac{C}{2r} > \frac{6r}{2r} = 3.$$

Таким образом, с помощью шестиугольника можно определить, что $\pi > 3$.

Конечно, шесть — это смехотворно малое число шагов, и получившийся шестиугольник — очень грубая карикатура на окружность, но для Архимеда он был всего лишь началом. Выяснив все, что мог дать ему шестиугольник, он уменьшил длину шагов, но увеличил их количество. Он добавил средние точки всех дуг и вместо одного шага стал делать два.



Он, как одержимый, продолжал делать так снова и снова, перейдя от шести шагов к 12, потом к 24, 48 и 96, вычисляя периметр получающихся многоугольников с точностью, вызывающей мигрень.



К сожалению, по мере уменьшения длины отрезков стало все труднее вычислять их длину, поскольку ему приходилось постоянно применять теорему Пифагора, а для этого требовалось находить квадратные корни — чертовски сложная вещь, когда приходится считать вручную. Кроме того, чтобы получить не только оценку снизу, но и сверху, Архимед использовал второй многоугольник — описанный вокруг окружности; его периметр был больше, чем длина окружности.

Я хочу сказать, что вычисление Архимедом числа π было героическим подвигом — и с логической, и с арифметической точки зрения. В итоге, использовав 96-угольник, вписанный в круг, и 96-угольник, описанный около круга, он доказал, что число π больше, чем $3 + 10/71$, и меньше, чем $3 + 10/70$.

Забудьте на минуту о математике. Просто насладитесь этим результатом на визуальном уровне:

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{10}{70}.$$

Неизвестное и вечно непостижимое число π оказалось зажато в тиски между двумя почти одинаковыми числами, отличающимися только знаменателями 70 и 71. Одно из полученных граничных значений — число $3 + 10/70 = 22/7$ — стало знаменитым приближением для π, знакомым всем школьникам; к сожалению, многие ошибочно считают его самим числом π.

Метод, который использовал Архимед (он основывается на более ранних работах греческого математика Евдокса), сегодня известен как метод исчерпывания, когда неизвестное число π оказывается зажатым между двумя известными числами. С каждым удвоением границы сближаются, оставляя числу π все меньше места.

Окружности — это простейшие кривые в геометрии. Тем удивительнее, что определение их количественных характеристик выходит за ее рамки. Например, вы не найдете упоминания о числе π в «Началах» Евклида, написанных за одно-два поколения до Архимеда. Вы найдете там доказательство (методом исчерпывания), что отношение площади круга к квадрату его радиуса одинаково для всех кругов, но ни малейшего намека на то, что это универсальное число близко к 3,14. Такое упущение Евклида было сигналом, что тут нужно что-то более глубокое. Чтобы разобраться с числовым значением π, потребовалась новая математика, которая бы могла работать с криволинейными формами. Как измерить длину кривой, площадь криволинейной фигуры или объем криволинейного тела? Эти актуальные вопросы увлекли Архимеда и позволили сделать первые шаги по направлению к тому, что мы сейчас именуем интегральным исчислением. Число π было его первым триумфом.

Дао числа π

Современным умам может показаться странным, что число π не появляется в формуле Архимеда для площади круга, $A = rC/2$, и что он никогда не записывал уравнения типа $C = \pi d$ для выражения длины окружности через диаметр. Он избегал это делать, поскольку π не было для него числом. Это было просто отношение двух длин, длины окружности и ее диаметра. Это была какая-то величина, а не число.

Сегодня мы не проводим различия между величиной и числом, но в древнегреческой математике оно было важным. По-видимому, оно возникло из-за напряженности между дискретным (представляемым целыми числами) и непрерывным (представляемым формами). Исторические подробности неясны, но, похоже, что где-то между Пифагором и Евдоксом, между VI и IV веками до нашей эры, кто-то доказал, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной*, то есть отношение этих двух длин нельзя выразить как отношение двух целых чисел. Говоря современным языком, этот кто-то обнаружил существование иррациональных чисел [9]. Есть подозрение, что это открытие потрясло и разочаровало греков, поскольку противоречило убеждениям пифагорейцев. Если целые числа и их отношения не могут измерить даже такую несложную вещь, как диагональ квадрата, то утверждение «все есть число» оказывалось ложным. Столь обескураживающее разочарование может объяснить, почему поздние греческие математики всегда ставили геометрию выше арифметики. Числам больше нельзя было доверять. Они не годились для фундамента математики.

Древнегреческие математики поняли, что, для того чтобы описывать непрерывные величины и рассуждать о них, им нужно нечто

* Традиция приписывает открытие несоизмеримых отрезков пифагорейцу Гиппасу (V век до нашей эры). Однако неизвестно, какие именно несоизмеримые отрезки он рассматривал. *Прим. пер.*

более мощное, чем целые числа. Поэтому они разработали систему, основанную на формах и их отношениях. Она опиралась на измерение геометрических объектов — длины отрезков, площади квадратов, объемы кубов. Все это греки называли величинами. Они считали их отличными от чисел и превосходящими их.

Думаю, именно поэтому у Архимеда не было тесных отношений с числом π. Он не знал, что с ним делать. Это было странное сверхъестественное творение, куда более экзотичное, нежели любое число.

Сегодня мы считаем π числом — действительным числом, для записи которого требуется бесконечное количество знаков после запятой, — причем числом захватывающе интересным. Моих детей оно просто заинтриговало. Они часто смотрели на тарелку, висящую на стене нашей кухни, на которой цифры числа π бежали по ободку, а затем сходились по спирали к центру, уменьшаясь в размерах по мере того, как пропадали в этом водовороте. Для детей очарование заключалось в выглядящей случайно последовательности цифр без каких-либо закономерностей и повторений, продолжающейся вечно — настоящей бесконечностью на тарелке. Первые несколько цифр в бесконечном десятичном представлении числа π таковы:

3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494...

Мы никогда не узнаем всех цифр числа π. Тем не менее они ожидают своего открытия. На момент написания этой книги лучшие компьютеры мира вычислили 22 триллиона цифр. И все же 22 триллиона — ничто по сравнению с бесконечным количеством цифр, определяющих π. Подумайте, насколько это тревожно с философской точки зрения. Я сказал, что цифры числа π есть, но где именно? В материальном мире их нет. Они существуют в какой-то платоновской реальности вместе с абстрактными понятиями вроде истины и справедливости.

В числе π есть нечто парадоксальное. С одной стороны, оно представляет собой порядок, воплощенный в форме круга, который долгое время считался символом совершенства и вечности. С другой же стороны, π — непокорное, внешне неопрятное число, его цифры не подчиняются никаким явным правилам, по крайней мере тем, которые мы можем воспринимать*. Число π неуловимо и загадочно, навеки недостижимо. Столь завораживающим его делает сочетание в нем порядка и беспорядка.

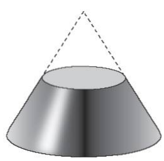
По большому счету π — это дитя анализа. Оно определяется как недостижимый предел нескончаемого процесса. Но, в отличие от последовательности многоугольников, неуклонно приближающихся к окружности, или незадачливого пешехода, проходящего половины половин пути к стене, у π нет предела, который мы можем узнать. И тем не менее π существует. Вот оно, четко определенное как отношение двух длин, лежащих перед нами: длины окружности и ее диаметра. Это отношение определяет π, причем максимально ясно, хотя само число ускользает сквозь наши пальцы.

Со своими началами инь и ян число π напоминает весь анализ в миниатюре. Это портал между круглым и прямолинейным, бесконечно сложное число, баланс между порядком и хаосом. В свою очередь, анализ использует бесконечное для изучения конечного, неограниченное для изучения ограниченного, прямое для изучения кривого. Принцип бесконечности — ключ к разгадке тайны кривых, и впервые он возник здесь, в загадке π.

* Предполагается, что число π нормально, то есть с одинаковой асимптотической частотой в нем встречаются все цифры, все комбинации из двух цифр, из трех цифр и вообще из любого числа цифр. В частности, это означает, что в нормальном числе рано или поздно встретится любая заданная последовательность цифр (например, номер вашего телефона или закодированная числами полная Британская энциклопедия). Однако пока нормальность π не доказана. *Прим. пер.*

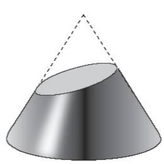
Кубизм встречается с анализом

Архимед углубился в загадку кривых, снова руководствуясь принципом бесконечности, в своем труде под названием «Квадратура параболы» [10]. Парабола — это кривая, которую описывает мяч при броске или струйка воды из фонтана. На самом деле эти дуги в реальном мире можно считать параболами только приближенно. Согласно Архимеду, настоящая парабола получается при сечении конуса плоскостью*. Представьте себе нож, который разрезает колпак или конический бумажный стаканчик; при разрезе могут получиться разные виды кривых — в зависимости от того, под каким углом нож будет резать конус. Разрез параллельно основанию конуса образует окружность.



круг

Если провести разрез немного наклонно, получится эллипс.

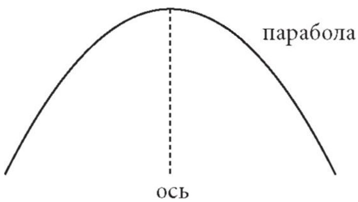


эллипс

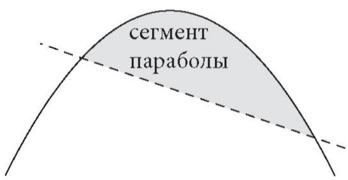
* Архимед не был первооткрывателем параболы и других конических сечений. Традиционно считается, что это сделал древнегреческий математик Менехм (примерно 380–320 до нашей эры). *Прим. пер.*

Если угол разреза будет таким же, как у самого конуса, получится парабола.

Если посмотреть на плоскость разреза, то парабола выглядит как изящная симметричная кривая. Линия симметрии называется осью параболы.

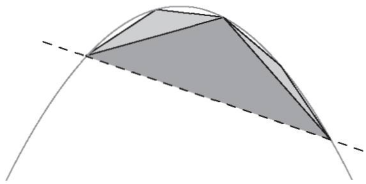


В своем труде Архимед поставил перед собой задачу вычислить площадь сегмента параболы. Говоря современным языком, сегментом параболы называется криволинейная область, лежащая между параболой и пересекающей ее прямой.



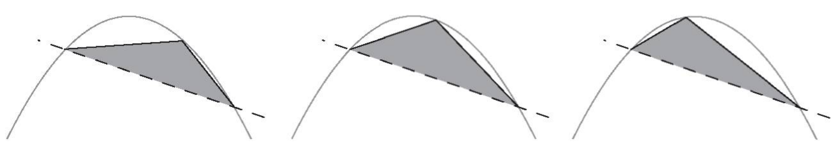
Термином «квадратура» называется определение площади какой-либо фигуры (изначально — построение квадрата, равновеликого этой фигуре), то есть поиск способа выразить ее через более простые формы — квадрат, треугольник, прямоугольник и прочие прямолинейные фигуры.

Архимед использовал потрясающую стратегию. Он представил сегмент параболы как бесконечное множество треугольных черепков, склеенных вместе, словно осколки разбитого глиняного горшка.

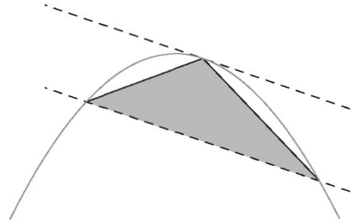


Эти осколки образуют бесконечную иерархию размеров: один большой треугольник, два поменьше, четыре еще меньше и так далее. Ученый планировал найти их площади, а затем сложить их и вычислить интересующую его площадь. Требовался калейдоскопический скачок художественного воображения, чтобы представить плавный сегмент в виде мозаики из угловатых кусков. Если бы Архимед был художником, он стал бы первым кубистом.

Для реализации своей стратегии Архимеду требовалось вычислить площадь всех осколков. Но как точно определить эти осколки? Ведь параболический сегмент можно разбивать на куски бесконечным числом способов — так же как бесконечным числом способов можно разбить тарелку на части. Самый большой осколок может выглядеть вот так, или так, или вот так:

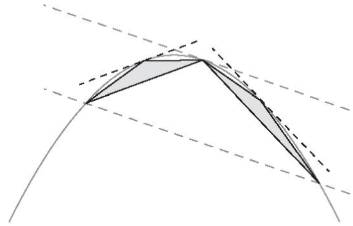


Ученому пришла в голову блестящая идея. Блестящая потому, что она создавала закономерность, которую можно было сохранять на всех уровнях иерархии. Он представил, как секущая линия в основании сегмента скользит вертикально, сохраняя свой наклон, пока не будет соприкасаться с параболой в единственной точке неподалеку от вершины.



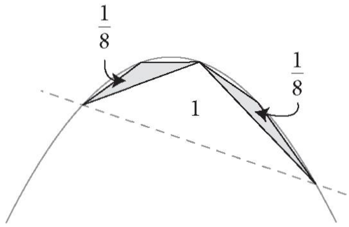
Такая особая точка называется точкой касания. Она определяет третью вершину большого треугольника, где две другие — точки пересечения секущей и параболы.

Архимед использовал эту же тактику для определения треугольников на *каждом* этапе в иерархии. Например, на втором этапе треугольники выглядели так:



Обратите внимание, что теперь роль наклонной линии, пересекавшей треугольник на предыдущем этапе, играют стороны большого треугольника.

Затем Архимед использовал известные геометрические факты о параболах и треугольниках, чтобы узнать, как площади треугольников одного уровня связаны с площадью треугольников предыдущего уровня. Он доказал, что площадь каждого нового треугольника составляет 1/8 площади породившего его треугольника. Таким образом, если считать, что площадь первого, самого крупного, треугольника 1 (пусть он будет нашей единицей площади), то площадь двух дочерних треугольников будет 1/8 + 1/8 = 1/4.



На каждом следующем этапе справедливо то же правило: дочерние треугольники всегда составляют в сумме четверть площади от родительского. Следовательно, общая площадь сегмента параболы, состоящая из всего бесконечного количества осколков, должна равняться

$$\text{Площадь} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$$

В этом бесконечном ряду каждый член вчетверо меньше предыдущего.

Существует простой способ вычислить сумму членов такого ряда, известного как геометрическая прогрессия. Хитрость состоит в том, чтобы избавиться от бесконечного числа слагаемых. Для этого умножим обе части уравнения на 4 и вычтем из получившегося равенства исходное. Смотрите: умножение всех членов ряда на 4 дает:

$$\begin{aligned} 4 \times \text{Площадь} &= 4\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\right) = \\ &= 4 + \frac{4}{4} + \frac{4}{16} + \frac{4}{64} + \ldots = \\ &= 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots = \\ &= 4 + \text{Площадь}. \end{aligned}$$

Чудо происходит между предпоследней и последней строками. В предпоследней строке, подобно фениксу, возродилось выражение для исходной площади: $\text{Площадь} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$ и поэтому мы получаем

$$4 \times \textit{Площадь} = 4 + \textit{Площадь}.$$

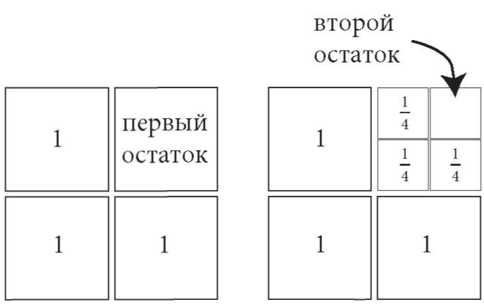
Вычитая из обеих частей величину *Площадь*, получаем $3 \times \textit{Площадь} = 4$, откуда $\textit{Площадь} = 4/3$. Другими словами, площадь сегмента параболы составляет $4/3$ от площади самого большого треугольника.

Рассуждение о сыре

Архимед не одобрил бы вышеприведенный трюк. Он получил тот же результат другим путем, используя рассуждение под названием *двойное доказательство от противного*. Он доказывал, что площадь сегмента параболы не может быть меньше $4/3$ или больше $4/3$, поэтому она должна быть равна $4/3$. Как позднее советовал Шерлок Холмс, «отбросьте все невозможное, и то, что останется, будет истиной, *какой бы невероятной она ни казалась*» [11].

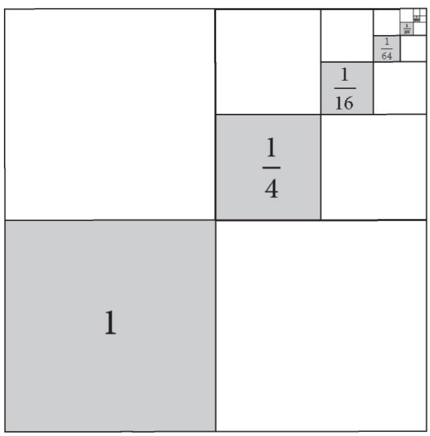
Принципиально важно здесь то, что Архимед устранил невозможное с помощью рассуждений, основанных на *конечном* количестве осколков. Он показал, что суммарная площадь всех осколков может отличаться от числа $4/3$ сколь угодно мало — просто надо взять достаточно большое их количество. Поэтому Архимед не прибегал к бесконечности. Все в его доказательстве было железным и вполне соответствует современным стандартам строгости.

Суть его аргументов легко понять, если представить их в виде повседневных терминов. Предположим, что три человека хотят поделить между собой четыре одинаковых ломтика сыра.



Самым здравым решением было бы дать каждому по кусочку, а оставшийся разрезать на три равные части. Это честно: каждый получит по 1 + 1/3 = 4/3 ломтика.

Но предположим, что эти трое оказались математиками, которые слоняются вокруг стола с едой перед семинаром, разглядывая последние четыре ломтика сыра. Самый сообразительный из троих, по совпадению носящий имя Архимед, может предложить такое решение: «Ребята, берем по одному куску, а оставшийся будем делить. Евклид, разрезай его на *четыре* части, а не на три. Теперь опять берем каждый по четверти, а оставшийся делим. Продолжаем так делать, пока оставшаяся крошка не перестанет нас интересовать. Хорошо? Евдокс, прекрати ныть».



Сколько всего сыра съест каждый из них, если процесс будет продолжаться бесконечно? После первого этапа каждый математик съест один ломтик. После второго, когда поделили четверть, у всех по 1 + 1/4 ломтика. После третьего этапа каждый съест по 1+ 1/4 + + 1/16 ломтика. И так далее. Если дележ будет продолжаться вечно, каждому достанется 1+ 1/4 + 1/16 + ... ломтиков сыра. А поскольку эта величина равна трети от исходного количества сыра, то 1+ 1/4 + 1/16 + ... = 4/3.

В «Квадратуре параболы» Архимед дал очень близкое рассуждение, включая диаграмму с квадратами разного размера, но нигде не прибегал к бесконечности и не пользовался аналогами многоточия, чтобы показать бесконечную сумму. Наоборот, он рассуждал в терминах конечных сумм, так что его изложение было безупречно строгим. Его ключевое соображение заключалось в том, что крохотный квадратик в правом верхнем углу — текущий остаток, который еще предстоит разделить, — можно сделать меньше любого заданного числа после достаточно большого, но конечного числа этапов. И, согласно аналогичным рассуждениям, величину $1+ 1/4 + 1/16 + ... + + 1/4n$ (общее количество сыра, которое получает каждый математик) можно сделать сколь угодно близкой к числу 4/3, если взять достаточно большое n. Поэтому единственно возможный ответ — 4/3.

Метод

В этот момент я начинаю испытывать настоящее расположение к Архимеду, поскольку в одном из своих сочинений* он делает то, на что решаются немногие гении: приглашает нас посмотреть, как он мыслит. (Я использую здесь настоящее время, потому что этот труд воспринимается так, словно ученый говорит с нами сегодня). Он делится своей уязвимой интуицией и выражает надежду, что будущие математики станут использовать ее для решения задач, которые ускользнули от него. Сегодня этот секрет известен как *метод***. Я никогда не слышал о нем на занятиях по анализу. Нас ему не учат. Но я нахожу его историю и саму изначальную идею захватывающей и уникальной.

* Практически все труды Архимеда содержатся в его письмах. *Прим. пер.*

** Полное название этой работы Архимеда — «Метод механических теорем». Автор называет методом и саму работу, и содержащийся в ней способ решения задач. *Прим. пер.*

Архимед пишет о «Методе» в письме своему другу Эратосфену, библиотекарю в Александрии и единственному математику того времени, способному его понять. Он признается, что хотя его метод и не обеспечивает реальной демонстрации результатов [13], которые его интересуют, он помогает установить истину. Это наделяет его интуицией. Как он говорит, «если мы с помощью этого метода заранее получили какие-то знания по нужному вопросу, получить доказательство проще, чем находить его без предварительного знания». Другими словами, разминаясь, играя с методом, Архимед приобретает ощущение территории. И это приводит его к надежным доказательствам.

Вот такой честный отчет о том, что значит заниматься творческой математикой. Математики не придумывают доказательств сразу. Сначала срабатывает интуиция. Строгость приходит позднее. Эту решающую роль интуиции и воображения часто не учитывают в школьных курсах геометрии, однако она важна для всей творческой математики.

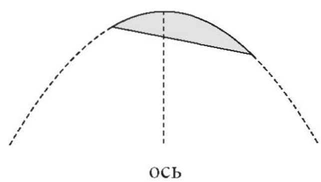
Архимед с надеждой заключает, что «среди нынешних и будущих поколений найдутся те, кто с помощью описанного здесь метода сможет найти другие теоремы, которые не выпали на нашу долю» [14]. От этих слов у меня на глаза наворачиваются слезы. Этот непревзойденный гений, ощущающий конечность своей жизни на фоне бесконечности математики, признает, что еще предстоит очень много сделать и что существуют «другие теоремы, которые не выпали на нашу долю». Все мы, математики, это понимаем. Наш предмет бесконечен. Он учит смирению даже самого Архимеда.

Первое упоминание о *методе* появляется в начале сочинения о квадратуре параболы, перед кубистским доказательством с помощью осколков. Архимед признает, что именно метод привел его к этому доказательству и прежде всего к числу 4/3.

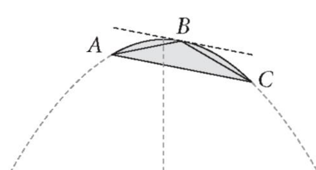
Что же это за метод и что в нем такого личного, блестящего и трансгрессивного? Метод *механический*; Архимед ищет площадь сегмента параболы, мысленно его *взвешивая*. Он думает об этой криволинейной области как о материальном предмете — я представляю его в виде тонкого листа металла, обрезанного до желаемой параболической формы, — а затем помещает его на один конец воображаемых весов. Или, если вам так удобнее, представьте его на конце воображаемой доски-качалки. Затем он выясняет, как уравновесить этот предмет с помощью фигуры, которую он уже умеет взвешивать, — треугольника. Отсюда он выводит площадь первоначального сегмента параболы.

Это еще более творческий подход, чем его кубистско-геометрическая техника осколков и треугольников, которую мы обсуждали ранее, поскольку в этом случае Архимед собирается построить для вычислений воображаемую доску-качалку, причем так, чтобы она соответствовала размерам параболы. В совокупности его идеи дадут ответ, который он ищет.

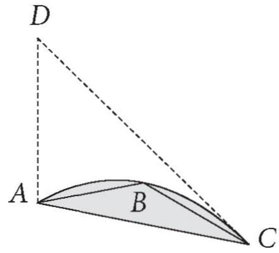
Он начинает с сегмента параболы и наклоняет его так, чтобы ось симметрии параболы была вертикальной.



Затем он строит качалку. Инструкция по эксплуатации гласит: *нарисуйте большой треугольник внутри сегмента параболы и обозначьте его ABC*. Как и в кубистском доказательстве, он будет служить стандартной мерой площади. Мы будем сравнивать с ним площадь сегмента и увидим, что она в 4/3 раза больше.

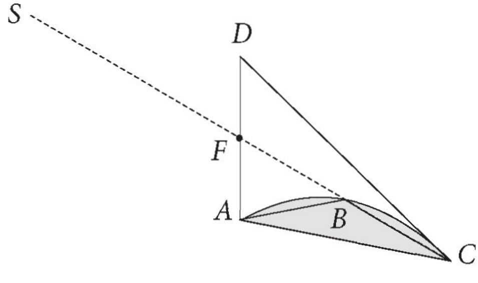


Теперь заключим наш сегмент в треугольник гораздо большего размера, ACD.

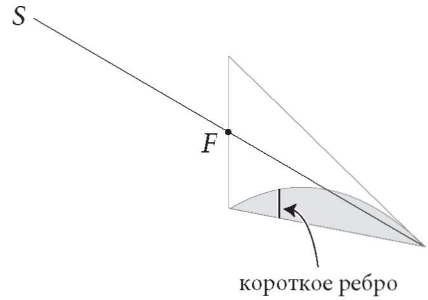


Верхняя сторона этого треугольника выбирается как касательная прямая к параболе в точке C. Основание треугольника — линия AC. Левая же сторона — линия, идущая от A вертикально вверх до пересечения с верхней стороной в точке D. С помощью обычной евклидовой геометрии Архимед доказывает, что площадь этого большого внешнего треугольника ACD вчетверо превышает ABC. (Этот факт станет важным позже, а пока возьмем его на заметку.)

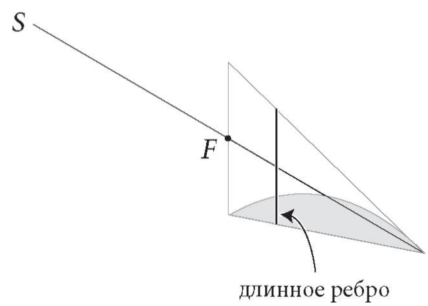
Следующий этап — строительство остальной части качалки: доски, двух сидений и точки опоры. Доска — это линия, соединяющая два сиденья. Она начинается в точке C (первое сиденье), проходит через B, пересекает границу внешнего треугольника в F (это будет точка опоры) и продолжается далее до точки S (второе сиденье), которая определяется как $FS = FC$. Иными словами, F — середина отрезка SC.



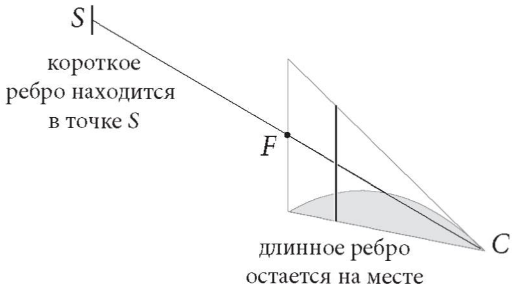
И вот тут появляется ошеломляющая идея, лежащая в основе всей концепции. Используя известные факты о параболах и треугольниках, Архимед доказывает, что можно уравновесить большой внешний треугольник относительно сегмента параболы, если представлять его *по одной вертикальной линии за раз*. Он считает обе фигуры состоящими из бесконечного количества параллельных отрезков, похожих на бесконечно тонкие планки или ребра. Вот типичная пара вертикальных линий-ребер. Короткое ребро соединяет основание с параболой,



а длинное ребро — с верхней стороной внешнего треугольника.



Суть идеи состоит в том, что эти ребра идеально уравновешивают друг друга, как дети, качающиеся на доске, если они находятся в правильных точках. Архимед доказывает, что если сдвинуть короткое ребро до точки S, а длинное оставить на своем месте, то они уравновешиваются.



То же самое верно для *любого* вертикального кусочка. Неважно, какой вертикальный срез вы сделаете, короткое ребро всегда уравновесит длинное, если вы поместите его в точку S, а длинное оставите на месте.

Поэтому две фигуры уравновешивают друг друга: ребро за ребром. Если перенести все ребра параболы в S, то они уравновешивают все ребра внешнего треугольника ACD. Соответственно, вся масса параболы, перемещенная в S, уравновешивает внешний треугольник, находящийся там, где он есть.

Далее Архимед заменяет весь внешний треугольник одной эквивалентной точкой под названием центр тяжести треугольника. Эта точка — словно «заместитель» треугольника. Весь треугольник воздействует на доску качелей так, будто вся его масса сосредоточена в одной точке — центре тяжести. Этот центр, как Архимед уже показал в другой работе, лежит внутри треугольника на линии FC в точке, расстояние от которой до F ровно в три раза меньше, чем расстояние SF.

Итак, у нас получается рычаг, где вся масса параболы в точке S уравновешивает массу треугольника (сосредоточенную в одной точке), причем длинное плечо рычага втрое длиннее короткого. Следовательно, по закону рычага масса параболы втрое меньше площади треугольника. Это означает, что площадь сегмента параболы составляет треть от площади треугольника *ACD*. Однако ранее мы уже взяли на заметку тот факт, что *ACD* вчетверо больше *ABC*. Поэтому площадь сегмента параболы составляет 4/3 от площади треугольника *ABC* внутри него... Тот же результат, что мы получили, находя площадь с помощью бесконечного ряда из треугольных осколков!

Надеюсь, мне удалось передать всю психоделичность этого рассуждения. Здесь Архимед уже больше похож не на гончара, собирающего черепки, а на мясника. Он делит ткань параболической области, по одной вертикальной полоске за раз, и подвешивает эти бесконечно тонкие полоски на крюке в точке S. Общий вес мяса остается таким же, как если бы это был исходный цельный сегмент параболы. Просто он порезал исходную фигуру на множество вертикальных тончайших полосок, висящих на одном крюке. (Хм, странный образ. Возможно, нам лучше придерживаться терминологии доски-качалки?!)

Почему я назвал это рассуждение трансгрессивным? Потому что оно оперирует актуальной бесконечностью. На каком-то этапе Архимед открыто описывает внешний треугольник как «составленный из всех параллельных линий» [15]. Конечно, в греческой математике это было табу — вся эта бесконечная совокупность вертикальных линий, все эти вертикальные ребра. Он открыто представляет треугольник как уже завершенную бесконечность — совокупность ребер. И, делая это, выпускает голема на свободу.

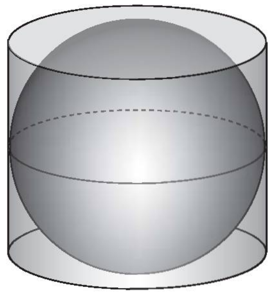
Точно так же он описывает сегмент параболы — как «состоящий из всех параллельных линий, нарисованных внутри фигуры» [16]. Привлечение актуальной бесконечности, по его оценке, понижает статус этого рассуждения до эвристического — то есть это средство найти ответ, но не доказать его правильность. В письме Эратосфену он преуменьшает значение метода, говоря, что это не более чем своего рода указание на то, что вывод будет верным [17].

Каким бы ни был статус метода Архимеда, он обладает свойством *e pluribus unum*. Это латинское выражение, означающее «из многих — единое», используется как девиз на гербе США. Из бесконечного множества отрезков, составляющих параболу, возникает единая область. Думая о ней как о массе, Архимед перемещает ее, отрезок за отрезком, на левое сиденье доски-качалки. Теперь бесконечность отрезков представлена массой, сосредоточенной в одной точке. Единое заменяет многое, представляя его точно и верно.

То же самое справедливо и для уравновешивающего внешнего треугольника на правой стороне доски. Континуум вертикальных линий превращается в одну точку — центр тяжести. Она тоже заменяет целое. Бесконечность схлопывается в единое, *e pluribus unum*. Только это не поэзия и не политика, а истоки интегрального исчисления. Треугольники и сегменты парабол каким-то таинственным образом в каком-то смысле, который Архимед не смог строго определить, явно эквивалентны бесконечности из вертикальных линий.

Хотя Архимеда, похоже, смущает его заигрывание с бесконечностью, у него хватает смелости в этом признаться. Любой, кто пытается измерить криволинейную форму — найти длину границы или объем, который она заключает, — вынужден сражаться с пределом бесконечных сумм бесконечно малых частей. Осторожные люди могут попытаться обойти эту необходимость с помощью метода исчерпывания. Но на деле от нее никуда не деться. Справляться с криволинейными формами — так или иначе значит справляться с бесконечностью. Архимед открыто об этом говорит. Когда ему нужно, он может нарядить свои доказательства в респектабельные одежды, используя конечные суммы и метод исчерпывания. Но в глубине души он лукавит. Он признает, что мысленно взвешивает фигуры, мечтает о рычагах и центрах тяжести, взвешивая области и твердые тела отрезок за отрезком, по одному бесконечно малому кусочку за раз.

Архимед применил этот метод ко многим другим задачам о криволинейных формах. Например, для поиска центра тяжести полусферы, параболоида и сегментов эллипсоидов и гиперболоидов. Его любимый результат, который касался соотношения объемов и площадей поверхности шара и цилиндра [18], нравился ему настолько, что он завещал высечь его на могильном камне. Представьте себе шар, точно размещенный в цилиндрической коробке (шар, *вписанный* в цилиндр).



С помощью метода Архимед установил, что объем вписанного в цилиндр шара составляет 2/3 от объема цилиндра, а площадь поверхности этого шара — 2/3 от площади поверхности описанного цилиндра. Обратите внимание, что он не дал *формул* для объема или площади поверхности сферы, как мы сделали бы сегодня. Он выразил свой результат в виде пропорций. Это классический греческий стиль. Все выражается в пропорции. Область сравнивали с другой областью, а объем — с другим объемом. И когда в пропорциях получились небольшие целые числа, как здесь (3 и 2) или в случае сегмента параболы (4 и 3), это было источником непередаваемого удовольствия. В конце концов, эти же самые соотношения 3:2 и 4:3 имели особое значение для древних греков из-за их роли в пифагорейской теории музыкальной гармонии. Вспомните, что, если защипнуть две струны с соотношением длин 3:2, они звучат гармонично, будучи разделенными через интервал, известный как квинта. Аналогично струны в соотношении 4:3 дают кварту. Такие числовые совпадения между гармонией и геометрией, должно быть, восхищали Архимеда.

Его слова в трактате «О шаре и цилиндре» показывают, насколько ему нравится результат: «Разумеется, эти свойства были присущи этим телам всегда, но они остались неизвестными всем геометрам» [19]. Не обращайте внимания на нотки гордости, а сосредоточьтесь на его утверждении, что «свойства были присущи этим телам всегда, но они остались неизвестными». Здесь он выражает философию математики, близкую сердцам всех математиков. Мы чувствуем, что *открываем* математику. Результаты уже существуют и ждут нас. Они всегда были присущи телам. Мы их не изобретаем. В отличие от Боба Дилана или Тони Моррисона, мы не пишем музыку или романы, которых раньше не было, а открываем уже имеющиеся факты, которые присущи изучаемым нами объектам. Хотя у нас есть творческая свобода изобретать сами объекты — создавать такие идеализации, как сферы, круг и цилиндры, как только мы это делаем, они начинают жить собственной жизнью.

Когда я читаю, как Архимед радуется обнаружению соотношений для площади поверхности и объема шара, я испытываю аналогичные ощущения. Или, скорее, понимаю, что он чувствовал то же самое, что и все мои коллеги-математики. Хотя нам говорят, что «прошлое — это чужая страна»*, она не может быть чужой во всех отношениях. Люди, о которых мы читаем у Гомера и в Библии, очень похожи на нас. То же самое, по-видимому, верно и в отношении древнегреческих математиков, по крайней мере Архимеда, единственного, кто впустил нас в свое сердце.

Двадцать два века назад, написав письмо своему другу Эратосфену, библиотекарю в Александрии, Архимед, по сути, отправил ему математическое послание в бутылке, которое тогда практически никто не мог оценить, но он надеялся, что оно благополучно преодолеет моря времени. Он делился своей интуицией, своим методом, желая, чтобы он помог будущим поколениям математиков «найти другие теоремы, которые не выпали на нашу долю». Шансы были против

* «Прошлое — чужая страна, здесь все по-другому» — первая фраза романа Лесли Хартли «Посредник» (1953). Впоследствии выражение «прошлое — чужая страна» стало названием книги Дэвида Лоуэнталя (1985). *Прим. пер.*

него. Времена всегда были жестокими. Царства рушились, библиотеки сжигались, рукописи портились. Ни одна копия «Метода» не пережила периода Средневековья. Хотя Леонардо да Винчи, Галилей, Ньютон и другие гении Возрождения и научной революции изучали то, что осталось от трудов Архимеда, у них не было возможности прочитать «Метод». Считалось, что он безвозвратно утерян.

А затем каким-то чудом его нашли.

В октябре 1998 года потрепанный средневековый молитвенник был выставлен на аукцион Christie's и продан анонимному частному коллекционеру за 2,2 миллиона долларов. Под латинскими молитвами просматривались едва различимые геометрические чертежи и математический текст, написанный на греческом языке в X веке. Книга оказалась палимпсестом: в XIII веке ее пергаментные листы были вымыты и очищены от греческого текста ради написанных поверх литургий на латыни. К счастью, греческий текст не был полностью уничтожен. Это оказалась единственная сохранившаяся копия «Метода» Архимеда*.

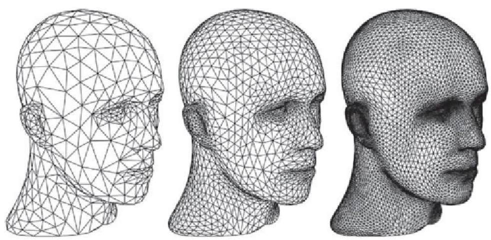
На палимпсест Архимеда [20], как сейчас называют эту рукопись, впервые обратили внимание в 1899 году, когда он находился в православной библиотеке в Константинополе. Ренессанс и научную революцию он пролежал незамеченным в лавре Саввы Освященного недалеко от Вифлеема. Сейчас он находится в художественном музее Уолтерса в Балтиморе, где был с любовью отреставрирован и исследован с применением новейших технологий воссоздания изображений**.

* Кроме «Метода математических теорем», палимпсест содержит еще несколько работ Архимеда, из которых две («Стомахион» и «О плавающих телах») также сохранились только в этом документе. *Прим. пер.*

** Документ, хранившийся в лавре, был известен и раньше. Греческий текст в нем заметили еще в 1840-х годах. То, что текст принадлежит Архимеду, установил в 1906 году датский ученый Йохан Гейберг, который сфотографировал и издал эти работы в собрании сочинений Архимеда в 1910–1915 годах. После этого палимпсест выпал из истории и всплыл только на аукционе Christie's. К сожалению, к этому времени оказалось, что уже в XX веке некоторые страницы пропали, а один из владельцев добавил несколько иллюстраций, навсегда испортивших текст под ними. С 1998 года началось активное изучение документа. *Прим. пер.*

Архимед сегодня: от компьютерной анимации до лицевой пластики

Наследие Архимеда живо и сегодня [21]. Взгляните на анимированные фильмы [22], которые так любят смотреть наши дети. Персонажи «Шрека», «В поисках Немо» или «Истории игрушек» кажутся такими живыми и настоящими отчасти потому, что воплощают идею Архимеда: любую гладкую поверхность можно надежно аппроксимировать треугольниками. Например, вот три триангуляции головы манекена [23]:



Чем больше треугольников мы возьмем и чем меньше их размер, тем лучше становится приближение.

То, что верно для манекенов, верно и для огров, и для рыб-клоунов, и для игрушечных ковбоев. Подобно тому как Архимед использовал мозаику из бесконечного количества осколков, чтобы представить сегмент гладкой криволинейной параболы, современные аниматоры из DreamWorks создают круглый живот Шрека и его милые трубообразные уши из десятков тысяч многоугольников. Еще больше потребовалось для сцены турнира, где Шрек [24] сражался с местными громилами: каждый ее кадр требовал свыше 45 миллионов многоугольников [25]. Но в готовом фильме их следов нигде нет. Как учит нас принцип бесконечности, прямое и угловатое может олицетворять изогнутое и гладкое.

Когда примерно через десять лет вышел фильм «Аватар» [26], уровень многоугольной детализации стал запредельным. По настоянию режиссера Джеймса Кэмерона аниматоры использовали около миллиона многоугольников, чтобы изобразить каждое растение в воображаемом мире Пандоры. А учитывая, что действие происходило в пышных виртуальных джунглях, там насчитывалось множество растений... и множество многоугольников. Неудивительно, что производство «Аватара» обошлось в триста миллионов долларов. Это был первый фильм, в котором многоугольники использовались миллиардами [27].

В самых ранних компьютерных анимационных фильмах многоугольников было куда меньше. Тем не менее в то время вычисления казались ошеломляющими. Возьмем «Историю игрушек» [28], вышедшую в 1995 году. Одному аниматору тогда требовалась неделя, чтобы синхронизировать восьмисекундный кадр. На создание всего фильма ушло четыре года и 800 тысяч часов компьютерного времени. Как говорил в интервью журналу Wired сооучредитель студии Pixar Стив Джобс, «над этим фильмом работает больше людей с ученой степенью, чем над любым другим в истории кино» [29]. Вскоре после «Истории игрушек» вышел первый анимационный ролик с человеком в главной роли — «Игра Джери» [30]. Эта забавная и грустная история одинокого старичка, который играет сам с собой в шахматы в парке, получила в 1998 году «Оскар» за лучший короткометражный анимационный фильм.

Как и другие персонажи, созданные компьютером, Джери был сконструирован из угловатых форм. В начале этого раздела я показал компьютерную графику лица из все большего количества треугольников. Примерно таким же образом аниматоры студии Pixar смоделировали голову Джери из сложного многогранника, состоявшего из примерно 4500 вершин, соединенных ребрами и гранями, как драгоценный камень. Аниматоры сильнее и сильнее делили эти грани, чтобы получить все более детальное изображение. Этот процесс занял намного меньше компьютерной памяти, чем методы, использованные ранее, и позволял делать анимацию гораздо быстрее [31]. На тот момент это был революционный прорыв в компьютерной анимации, но по духу — продолжение идей Архимеда. Напомним: для того чтобы оценить число π, Архимед начал с шестиугольника, затем перешел к двенадцатиугольнику. После следующего деления получился многоугольник с 24 сторонами, затем 48-угольник и наконец 96-угольник; так происходило постепенное приближение к предельной фигуре — окружности. Точно так же, многократно разделяя свой многогранник, аниматоры Джери аппроксимировали морщинистый лоб персонажа, его торчащий нос и складки кожи на шее. Повторяя этот процесс достаточное количество раз, они смогли сделать Джери таким, каким он должен быть — похожим на куклу персонажем, передающим широкий спектр человеческих чувств.

Через несколько лет конкурент Pixar, компания DreamWorks, сделала следующий шаг на пути к реализму и эмоциональной выразительности в своей истории о дурно пахнущем, ворчливом героическом огре по имени Шрек.

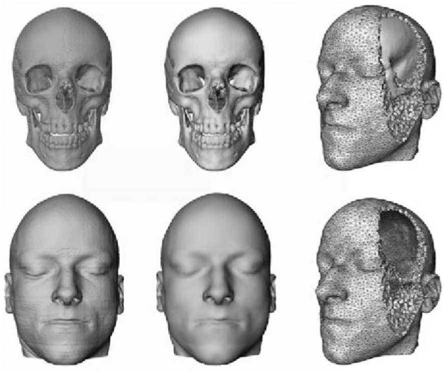
Хотя Шрек никогда не существовал вне компьютера, выглядел он почти как человек. Отчасти потому, что аниматоры постарались воспроизвести анатомию человека. Под виртуальной кожей они создали виртуальные мышцы, жир, кости и суставы. Все было сделано настолько добросовестно, что, когда Шрек открывал рот, чтобы сказать что-нибудь, кожа на его шее образовывала второй подбородок [32].

Это подводит нас к другой области, где идея Архимеда о приближении прямолинейными формами оказалась полезной, — пластической хирургии лица [33] для пациентов с неправильным прикусом, смещением челюстей и другими врожденными пороками. В 2006 году немецкие математики Петер Дойфлхард, Мартин Вайзер и Стефан Захов сообщили о результатах своей работы по применению анализа и компьютерного моделирования для прогнозирования результатов сложных операций на лице.

Первым шагом было построение точной карты структуры лицевых костей пациента. Для этого использовалась компьютерная (КТ) или магнитно-резонансная (МРТ) томография. Результаты давали информацию о трехмерной конфигурации лицевых костей черепа, с помощью которой исследователи строили компьютерную модель лица пациента. Эта модель была не просто геометрически точной; она была биомеханически точной. Она включала реалистичные оценки свойств кожи и мягких тканей — жиров, мышц, сухожилий, связок и кровеносных сосудов. С помощью компьютерной модели хирурги могли проводить операции на виртуальных пациентах, подобно тому как пилоты оттачивают мастерство на летных тренажерах. Виртуальные кости лица, челюсти и черепа можно резать, перемещать, наращивать или полностью удалять. Компьютер рассчитывал, как в ответ на появление новой костной структуры будут перемещаться и перестраиваться виртуальные мягкие ткани.

Результаты такого моделирования полезны по нескольким причинам. Они предупреждают хирургов о возможных неблагоприятных воздействиях процедуры на такие уязвимые структуры, как нервы, кровеносные сосуды и корни зубов. Они также показывают, как будет выглядеть лицо пациента после операции, поскольку модель предсказывает, как переместятся мягкие ткани после выздоровления пациента. Еще одно преимущество — это позволяло хирургам лучше подготовиться к реальной операции в свете смоделированных результатов. А пациенты могли более взвешенно принимать решение о необходимости операции.

Идеи Архимеда проявились, когда исследователи смоделировали гладкую двумерную поверхность черепа с помощью огромного количества треугольников. Мягкие ткани создавали собственные геометрические проблемы. В отличие от черепа, мягкие ткани полностью заполняют трехмерный объем. Они наполняют сложное пространство между кожей лица и черепом. Ученые представили эту ткань сотнями тысяч тетраэдров — трехмерных аналогов треугольников. На изображении внизу поверхность черепа аппроксимируют примерно 250 000 треугольников (они слишком малы, чтобы их разглядеть), а объем мягких тканей включает 650 000 тетраэдров.

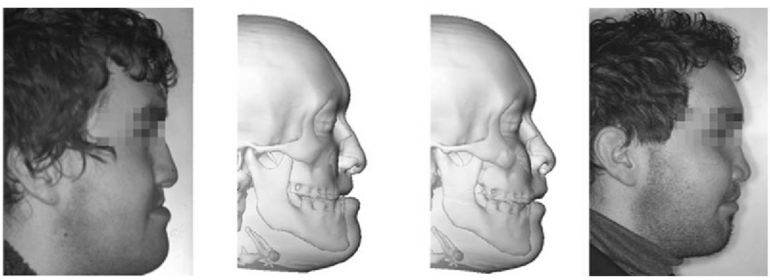


Массив тетраэдров позволил исследователям предсказать, как поведут себя после операции мягкие ткани пациента. Грубо говоря, мягкие ткани — это упругий материал, немного похожий на резину или эластан. Если вы ущипнете себя за щеку, она изменит форму, а когда отпустите, вернется к естественному состоянию. Еще с 1800-х годов математики и инженеры использовали анализ, чтобы смоделировать, как различные материалы будут растягиваться, изгибаться или скручиваться, если их сжимать, растягивать или резать различными способами. Эта теория лучше всего развита в традиционных областях техники, где она используется для изучения напряжений и деформаций в мостах, зданиях, крыльях самолетов и многих других конструкциях из стали, бетона, алюминия и прочих жестких материалов. Немецкие исследователи адаптировали традиционный подход к мягким тканям и обнаружили, что он работает достаточно хорошо для того, чтобы быть полезным хирургам и пациентам.

Их основная идея заключалась в следующем. Представим мягкие ткани в виде сети тетраэдров, связанных между собой подобно бусинкам, соединенным эластичными нитями. Эти бусинки изображают небольшие кусочки ткани. Они соединены эластично, потому что в реальности атомы и молекулы в тканях соединены химическими связями. Эти связи сопротивляются растяжению и сжатию, что и обеспечивает упругость. Во время виртуальной операции хирург разрезает кости на виртуальном лице и передвигает некоторые их фрагменты. Когда кусок кости перемещается на новое место, он тянет за собой присоединенные ткани, а те, в свою очередь, тянут соседние ткани. В результате из-за этих сил сеть меняет конфигурацию. По мере движения участков ткани они меняют силы, оказываемые на соседей, поскольку связи между участками растягиваются или сжимаются. Затронутые соседи перенастраиваются сами и так далее. Отслеживание всех возникающих сил и смещений требует колоссальных вычислений, которые может выполнить только компьютер. Шаг за шагом алгоритм корректирует мириады сил и перемещений в крошечных тетраэдрах. В конечном счете все силы уравновешиваются и ткани приходят в новое состояние равновесия. Это и будет новой формой лица пациента, предсказанной моделью.

В 2006 году Дойфлхард, Вайзер и Захов проверили прогнозы своей модели для примерно тридцати клинических случаев и пришли к выводу, что она работает замечательно. В качестве одной из мер ее успешности было правильно предсказанное — с точностью до миллиметра — положение 70% поверхности кожи на лице пациента. Только для 5–10% поверхности отклонение от прогноза составляло более трех миллиметров. Другими словами, модели можно было доверять. И это, конечно, гораздо лучше, чем действовать наугад. Вот пример с одним пациентом до и после операции. На четырех иллюстрациях показан его профиль до операции (крайний рисунок слева), компьютерная модель лица в этот момент (второй рисунок слева), спрогнозированный результат операции (второй рисунок справа) и фактический результат (крайний рисунок справа).

Посмотрите на положение его челюсти до и после операции. Результаты говорят сами за себя.



К загадке движения

Я пишу эти строки на следующий день после метели. Вчера было 14 марта, День числа π*, и у нас навалило тридцать сантиметров снега. Сегодня утром, четвертый раз расчищая подъездную дорожку, я с завистью наблюдал, как небольшой трактор с роторным снегометом

* В американской системе записи дат (сначала месяц, а потом число) 14 марта записывается как 3/14. Поэтому с 1987 года этот день стал неофициальным праздником — Днем числа пи. Строго говоря, отмечать положено 14 марта в 1:59:26, поскольку $\pi = 3{,}1415926...$ *Прим. пер.*

легко прокладывал по улице путь. С помощью вращающегося винта он забирал снег, а потом выбрасывал его во двор моего соседа.

Подобное использование вращающегося винта для перемещения чего-либо также восходит к Архимеду, по крайней мере согласно традиции. В его честь мы называем такой механизм архимедов винт [34]. Говорят, что ученый придумал его во время поездки в Египет (хотя, возможно, ассирийцы использовали его намного раньше) для подъема воды в ирригационные каналы. Сегодня в механических устройствах для поддержания работы сердца применяют насосы, использующие архимедов винт: они поддерживают циркуляцию крови при повреждениях левого желудочка.

Однако очевидно, что Архимед не хотел, чтобы его помнили за винты, военные машины или любые другие практические изобретения: он не оставил нам о них никаких записей. Больше всего он гордился своими математическими открытиями, что также заставляет меня задуматься, о каком его наследии уместно поразмышлять в День числа π. За двадцать два столетия, прошедших с тех пор, как Архимед нашел границы числа π, новые приближения появлялись много раз, но при этом всегда использовались математические методы, введенные Архимедом: приближения многоугольниками или бесконечные ряды. В более широком смысле его наследие — первое принципиальное использование бесконечных процессов для определения количественных характеристик криволинейных форм. В этом ему не было равных ни тогда, ни сейчас.

Однако геометрия криволинейных форм имеет свои пределы. Нам нужно также знать, как в этом мире происходит движение — как смещаются ткани после операции, как кровь течет по артериям, как мяч летит по воздуху. Об этом Архимед промолчал [35]. Он дал нам знания по статике, о телах, уравновешенных на рычаге и устойчиво плавающих в воде. Он был мастером равновесия. Территория впереди таила в себе загадки движения.