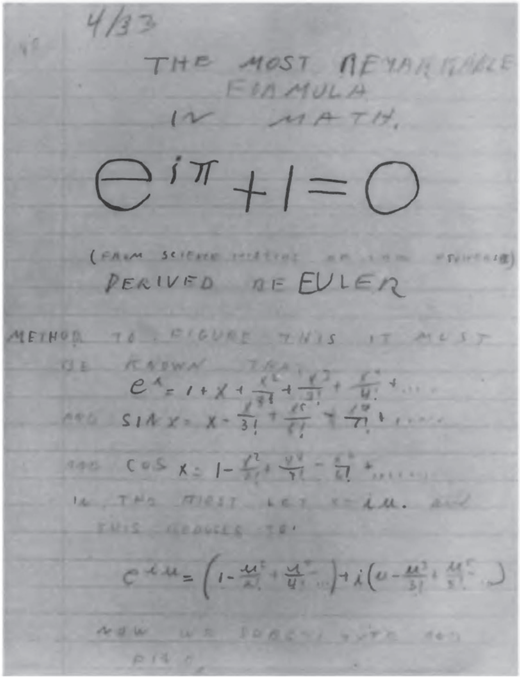

В юношеском дневнике за апрель 1933 года, незадолго до своего пятнадцатого дня рождения, Ричард Фейнман (1918–1988), будущий лауреат Нобелевской премии по физике, оставил заметку, относящуюся к основной теме этой книги. Обратите внимание на разложение в ряд экспоненты, синуса и косинуса – сразу под фразой «most remarkable result in math» («Самый замечательный результат в математике». – *Прим. перев.*). На следующей строке начинается стандартный вывод формулы Эйлера (ее еще называют тождеством Эйлера) $e^{iu} = \cos(u) + i\sin(u)$, из которой «замечательный результат» получается, если положить $u = \pi$. (В качестве источника Фейнман пользовался десятитомным справочником «The Science History of the Universe», впервые опубликованным в 1909 году.) Хотя Фейнман запомнился в первую очередь как физик, он был еще и талантливым математиком, и в книге «Характер физических законов» (1965) писал: «Тем, кто не знает математики, трудно постичь подлинную, глубокую красоту природы… Если вы хотите узнать Природу, оценить ее красоту, то нужно понимать язык, на котором она разговаривает». Фейнман, безусловно, согласился бы с одним из рабочих названий этой книги: «Комплексные числа реальны!» (фотография публикуется с разрешения отдела архивов Калифорнийского технологического института.)

Да простит мне Бог, наблюдающий за правильным употреблением математических символов – в рукописи, в печати и на доске, – этот и многие другие мои грехи.

Герман Вейль, с 1933 по 1952 год профессор математики в Институте перспективных исследований, цитата из книги «Классические группы», Принстон, 1946, стр. 289.
Книга была издана в СССР: *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления / пер. Д. А. Райкова. М.: ГИИЛ, 1947. С. 387.

Содержание

Вступительное слово от издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте **www.dmkpress.com**, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу **dmkpress@gmail.com**; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу **http://dmkpress.com/authors/publish_book/** или напишите в издательство по адресу **dmkpress@gmail.com**.

Скачивание исходного кода примеров

Скачать файлы с дополнительной информацией для книг издательства «ДМК Пресс» можно на сайте **www.dmkpress.com** или **www.дмк.рф** на странице с описанием соответствующей книги.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг – возможно, ошибку в основном тексте или программном коде, – мы будем очень благодарны, если вы сообщите нам о ней. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Если вы найдете какие-либо ошибки в коде, пожалуйста, сообщите о них главному редактору по адресу **dmkpress@gmail.com**, и мы исправим это в следующих тиражах.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу **dmkpress@gmail.com**.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

О чем эта книга, что нужно знать для ее чтения и ПОЧЕМУ вам следует прочитать ее

Все сколько-нибудь важное основано на математике.

– *Роберт Хайнлайн*. «Звездный десант» (1959)

Несколько лет назад издательство Принстонского университета выпустило мою книгу «An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$» (1998), в которой описано мучительно долгое и непростое открытие комплексных чисел. Будучи по духу исторической, та книга все же содержала много математики. На самом деле так много, что мне пришлось опустить ее, иначе книга оказалась бы в два раза толще. Так вот, эта книга – та самая «вторая половина», которую я вынужден был опустить в 1998 году. Здесь тоже есть кое-какие исторические сведения, но акцент сделан на более продвинутых математических рассуждениях (впрочем, не выходящих за пределы очерченного ниже уровня подготовки), на тех вещах, которые, на мой взгляд, было бы справедливо назвать «завлекательной стороной» комплексных чисел. Конечно, обе книги в чем-то пересекаются, но всюду, где возможно, я старался ссылаться на «An Imaginary Tale» (AIT) и не повторяться.

Для чтения этой книги необходима математическая подготовка в объеме двух курсов технического или физического вуза. То есть два года изучения математического анализа, один курс по дифференциальным уравнениям и, пожалуй, предварительное знакомство с матричной алгеброй и элементарной теорией вероятностей.

Студенты третьего курса математических специальностей, безусловно, имеют необходимые знания! Признаю, что эти требования оставляют за бортом немало читателей, имеющих хорошее образование в других областях. Такие люди обычно разделяют взгляды британского премьер-министра Уинстона Черчилля, который в своей автобиографии «Мои ранние годы» писал:

> «Однажды я прочувствовал математику, словно обозрел ее всю, все ее глубины раскрылись передо мной, вся ее бездонность. Подобно тому как многие наблюдают за прохождением Венеры или шествием лорда-мэра, я наблюдал за полетом величины через бесконечность и сменой ее знака с плюса на минус. Я понял, почему это происходит и как один шаг влечет за собой все другие. Похоже на политику. Но озарение пришло после плотного ужина – и мне было не до него!»

Уверен, Черчилль пытался пошутить, но другие, столь же откровенно признающие незнание математики, похоже, не слишком обеспокоены этим. Взять, к примеру, рецензию известной писательницы Джойс Кэрол Оутс на роман Э. Л. Доктороу «Град Божий» (New York Review of Books, March 9, 2000, p. 31). Оутс (профессор Принстонского университета и лауреат Пулитцеровской премии) писала: «Науки о Вселенной и дисциплины, основным языком которых является математика, а не обычная речь, непостижимы даже неплохо образованному нематематику». Не согласен с этим. Разве полное невежество в предмете, который каждый год *преподают миллиону первокурсников и второкурсников* колледжей (математики на уровне этой книги), не должно заставить хоть *немного* задуматься?

Не согласятся с Оутс и некоторые ее коллеги по литературному цеху. Новеллист Ребекка Голдштейн писала в 1993 году в своей книге «Strange Attractors»: «Математика и музыка – языки, на которых разговаривает Бог. Говоря на них, … вы говорите напрямую с Богом». Мне также приходят на ум такие великие американские поэты прошлого, как Генри Лонгфелло и Эдна Сент-Винсент Миллей. Это Миллей принадлежит часто цитируемая строка из сборника сонетов 1923 года «The Harp-Weaver»: «Один Евклид взирал на Красоту без маски». Но именно Лонгфелло уже давным-давно предельно откровенно ткнул пальцем в тот пробел в знаниях, который без тени смущения признают многие образованные в остальных отношениях умы. В первых абзацах главы 4 романа «Кавана», написанного в 1849 году, мечтательный и погруженный в размышления школьный учитель м-р Черчиль и его жена Мэри ведут такую беседу в его кабинете:

> – Я вот [говорит Мэри] не понимаю, как можно сделать математику поэтической. Нет в ней никакой поэзии.
>
> – А [восклицает м-р Черчилль], это огромная ошибка! В науке о числах есть что-то божественное. Подобно Господу, она вмещает море в сложенной горсти. Она измеряет землю, взвешивает звезды, освещает Вселенную; она – закон, порядок и красота. А мы воображаем – по крайней мере, большинство из нас, – будто ее высшее достижение и последний предел – двойная запись в бухгалтерии. Мы так преподаем – потому она и кажется такой прозаичной.

И *вы*, раз уж читаете эту книгу, конечно, оцените и согласитесь со словами *этого* мистера Черчилля!

ПРЕДИСЛОВИЕ

Когда математика вошла в моду?

Этот вопрос, заданный в редакционной статье[1] газеты «Бостон Глоб» за 2002 год, отражает тот факт, что идея красоты в математике перекочевала из замкнутого населенного преимущественно мужчинами мира покуривающих трубку и потягивающих шерри математиков в твидовых пиджаках и вельветовых брюках, собирающихся на свой еженедельный послеполуденный семинар в колледже, в «реальный мир» водителей грузовиков, подростков и пенсионеров, которые хотят немного поразвлечься дождливым вечерком. Вы поймете, что я имею в виду, если посмотрите фильм «Человек-паук 2» (2004), а точнее небрежное замечание Тоби Магуайра в роли голливудского супергероя о найденном Бернулли решении знаменитой задачи о кривой скорейшего спуска под действием силы тяжести.

Аргументируя свое заявление, редакционная статья в «Глоб» приводит цитаты из трех пьес и одного фильма как примеры этого знаменательного интеллектуального сдвига. В пьесе «Копенгаген» мы видим театральную постановку спора между физиками Нильсом Бором и Вернером Гейзенбергом о квантовой механике. Гейзенберг, в честь которого назван принцип неопределенности в природе (мы обсудим его в главе 5), в какой-то момент своего первоначального осмысления новой квантовой теории говорит: «Мир чисто математических конструкций. Я слишком возбужден, не могу спать». Затем он, согласно описанию в «Глоб», «при первых лучах восхода выбегает на берег моря и взбирается на выступающую в море скалу, о которую бьется прибой». Напоминает сцену, которую все мы не раз видели в фильмах 1930–1940-х годов, как раз перед тем (или после того), как героиню укладывают в постель. Эротическую связь между математическим озарением и оргазмом просто невозможно отрицать[2].

Затем автор статьи переходит к обсуждению пьес «Доказательство» (в которой зубодробительные формулы аттестуются как «красивые»), «Q.E.D»* (о физике-теоретике Ричарде Фейнмане, который часто говорил об удивительном свойстве математики оказываться корнем любой осмысленной интерпретации природы) и о получившем Оскар в 2001 году фильме Рона Ховарда «Игры разума». Это фильм о жизни математика из Принстонского университета Джона Нэша, несколько искаженной взглядом художника. Он был признан лучшим голливудским фильмом, потому что смог рассказать неискушенной публике (начиная с тинейджеров), в чем заключалась работа Нэша по теории игр. Странно, что «Глоб» не упомянула фильм 1997 года «Умница Уилл Хантинг» (странно, потому что в фильме играли Бен Аффлек и Мэтт Даймон, оба родом из Бостона), в котором в первых кадрах на экране строка за строкой появляются интегральные уравнения Фурье. В этом фильме, тоже получившем Оскара, главным героем является математический гений, работающий ночным уборщиком в Массачусетском технологическом институте. В фильме «Проклятый путь» (2002) киллер, которого играет Том Хэнкс, одержим отрицанием идеи о красоте математики и находит общий язык со своим сыном на почве *ненависти* к математике. Но, как любят говорить поэты, любовь и ненависть – две стороны одной медали, и математика даже в этом полном насилия фильме становится эмоциональной связующей нитью между двумя мужчинами.

Но еще раньше примеров, упомянутых в «Глоб», математики играли заметные роли в целом ряде известных фильмов[3]. Посмотрите такие фильмы, как «Соломенные псы» (1971) , «Теперь мой ход» (1980), «Выстоять и сделать» (1987), «Тихушники» (1992), «У зеркала два лица» (1996), «Контакт» (1997), «Пи» (1998) и «Энигма» (2002), – и вы согласитесь с «Глоб» – математика (которую часто приравнивали к крайней степени эксцентричности) действительно вошла в моду! Даже телевидение не осталось в стороне – в 2005 году вышел сериал «4исла» (англ. «Numb3rs»), где главными героями являются агент ФБР и его брат – математический гений, помогающий раскрывать преступления (техническим консультантом фильма был профессор математики из Калтеха, а многочисленные «атмосферные» сцены были призваны воспроизвести дух, царящий в научном сообществе).

---

* Что и требовалось доказать. – *Прим. перев.*

«Глоб» полагала, что такое проникновение математики в попкультуру произошло, потому что «притягательность математики и науки в том, что они апеллируют к познанию непостижимого». Включение науки в эту фразу само по себе любопытно, потому что многие физики считают вершиной красоты уравнения (обратите внимание на множественное число) эйнштейновской теории гравитации. Для них источником красоты является не математика как таковая, а элегантное выражение физической реальности в виде уравнений. Для них математика – зримая плоть, это правда, но только физика – душа – и источник – красоты. Один из лауреатов Нобелевской премии по физике 1933 года, Поль Дирак, – выдающийся представитель этой точки зрения. Дирак (1902–1984) известен многими замечаниями по поводу красоты в технике[4]; например, в ответ на вопрос (заданный в 1955 году в Москве) о его взглядах на философию физики он написал на доске «Физические законы должны обладать математической красотой». Эту доску до сих пор российские физики хранят как дань уважения.

Конечно, по мере того как физики узнают больше о физике, их уравнения меняются. Никто, даже Эйнштейн, не защищен от этой эволюции. Как гравитационная теория Ньютона уступила место эйнштейновской, так и теория Эйнштейна должна будет уступить место новым идеям, совместимым – в отличие от уравнений Эйнштейна – с квантовой механикой. Таким образом, эйнштейновская физика на некотором фундаментальном и очень глубоком уровне «неверна» (или, более вежливо, «ей чего-то недостает») и, стало быть, корректна лишь приближенно. Но означает ли это, что математическая красота уравнений теории Эйнштейна куда-то пропала?

Я так не думаю. Во введении я расскажу о воззрениях разных авторов на то, что делает теории (и их уравнения) красивыми, но один момент там не упомянут, потому что здесь для этого более подходящее место. Я полагаю, что теория Эйнштейна сохраняет красоту, хотя, как мы теперь знаем, она не вполне корректна, по той причине, что стала результатом дисциплинированных рассуждений. Да, Эйнштейн создал новую физику, но сделал он это не как придется. Он выстраивал свою теорию в рамках строгих ограничений. Например, физические законы природы должны быть одинаковы для всех наблюдателей, независимо от их движения во Вселенной. Я думаю, что теория, удовлетворяющая такому широкому ограничению, просто обязана быть красивой.

Уродливы, на мой взгляд, те теории или картины, которые не подчиняются никаким ограничениям, в основе которых нет дисциплины. Например, только по этому критерию я ставлю Нормана Рокуэлла выше Джексона Поллока как художника. Без сомнения, это вызовет чуть ли не смертельные конвульсии у большинства ценителей современного искусства, которые обзовут меня культурным неандертальцем (так считает моя жена, занимающаяся историей искусств), но всякий, кто, увидев результат расплескивания краски по холсту[5], – а этим каждый день занимаются двухлетние ребятишки в тысячах детских садов (да что там, я и сам делаю то же самое, когда крашу потолок!) – назовет это искусством, больше того – изящным искусством, страдает галлюцинациями или, по крайней мере, сильно дезориентирован (по моему скромному мнению). Чтобы уж довести свою точку зрения до логического завершения, я захожусь от смеха, воображая себе поклонников Джексона Поллока, которые в священном восторге разражаются возгласами при виде хаоса, образуемого краской, капающей на *пол* Сикстинской капеллы, не обращая внимания на роспись потолка, выполненную Микеланджело *методично*, *умело* и *дисциплинированно*. Поклонники Поллока могут возразить мне, сказав, что его работы красивы, потому что он *все-таки* придерживался дисциплины – «дисциплины» никогда не быть связанным дисциплиной! Я слыхал такой аргумент и прежде от студентов колледжа и признаюсь, что пока не нашел на него достойного ответа, кроме закатывания глаз.

В этой книге золотым стандартом математической красоты является одна из основных формул комплексного анализа – формула Эйлера, т. е. тождество $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, где $i = \sqrt{-1}$. В частности, при $\theta = \pi$ получается формула $e^{i\pi} = -1$, или, как ее обычно записывают, $e^{i\pi} + 1 = 0$. Мне кажется, что это компактное выражение – квинтэссенция красоты. Я нахожу тождество $e^{i\pi} + 1 = 0$ красивым, потому что оно справедливо даже при наличии очень сильного потенциального ограничения. Равенство точное; левая часть не «почти» и не «приблизительно» равна 0, она равна *нулю* в точности. Тот факт, что пять чисел, каждое из которых было открыто абсолютно независимо от других и роль которых в математике невозможно переоценить, оказываются связаны таким простым соотношением, – это чудо. Это красиво. И в отличие от физики, химии или техники наших дней, которые почти наверняка покажутся архаичными инженерам в далеком будущем, формула Эйлера по-прежнему будет казаться даже самым премудрым математикам, ушедшим от нас на десятки тысяч лет вперед, красивой и вызывающей восхищение, нисколько не потускневшей от времени.

Великий немецкий математик Герман Вейль (1885–1955) однажды заявил, наполовину в шутку: «В своей работе я всегда стремился объединить истину с красотой, но если нужно выбирать между тем и другим, я обычно выбираю красоту». Не бросайте книгу, и я попытаюсь продемонстрировать, что имел в виду Вейль, показав по-настоящему красивые (сексапильные?) вычисления с комплексными числами, многие из которых основаны в том числе и на формуле Эйлера.

Введение

> Как сонет Шекспира, выражающий самую сущность любви, как картина, обнажающая красоту человеческого тела, отнюдь не ограничиваясь поверхностным впечатлением, так формула Эйлера проникает в самые глубины бытия.
>
> – *Кит Девлин* о формуле $e^{i\pi} + 1 = 0$[1]

Живший в XIX веке математик из Гарвардского университета Бенджамин Пирс (1809–1880) производил сильное впечатление на студентов. Один из них спустя много лет после смерти Пирса писал: «Появление профессора Бенджамина Пирса, с длинной гривой седых волос, растрепанной бородой с проседью и глазами, необычно ярко блестевшими из-под мягкой фетровой шляпы, когда он быстро, но не слишком грациозно пересекал двор колледжа, очень точно отвечало бытующему среди нас мнению, что мы лицезрим настоящего живого гения, в облике которого присутствуют черты пророка»[2]. Тот же самый бывший студент далее вспоминает, что во время одной лекции «он вывел соотношение, связывающее π, e и i, $e^{\pi/2} = \sqrt[i]{i}$, которое, очевидно, сильно занимало его воображение»[3]. Он уронил мелок и тряпку, сунул руки в карманы, несколько минут созерцал формулу, а затем обернулся к аудитории и очень медленно и внушительно сказал: «Джентльмены, вне всяких сомнений, эта формула абсолютно парадоксальна, мы не понимаем ее и не можем осознать, что она означает, но мы ее доказали, а значит, она должна быть истинной».

Как всякий хороший преподаватель, Пирс почти наверняка стремился к драматичности («Мы едва могли следовать за его мыслью, но сели попрямее и приняли к сведению»), но с этими словами он зашел слишком далеко. Конечно, мы *можем* понять то, что Пирс всегда называл «таинственной формулой», и, безусловно, *знаем*, что она означает. И тем не менее она остается чудесным и очень красивым выражением, и, сколь бы хорошо мы ее ни «понимали», это не уменьшает восторг, испытываемый при взгляде на нее. Как говорится в одном лимерике (эту стихотворную форму математики особенно любят):

> *e* raised to the *pi* times *i*,
> And plus 1 leaves you nought but a sigh.
> This fact amazed Euler
> That genius toiler,
> And still gives us pause, bye the bye*.

В этом лимерике затрагивается сразу несколько предметов, которые нам вскоре предстоит обсудить. Что такое *e*, *пи* и *i*, и кто такой Эйлер? Мне трудно поверить, что в мире найдется хотя бы один грамотный человек, никогда не слышавший о трансцендентных числах $e = 2.71828182\ldots$ и $pi = \pi = 3.14159265\ldots$ и о мнимом числе $i = \sqrt{-1}$. Что касается Эйлера, то он, безусловно, был одним из величайших математиков всех времен и народов. Составлять списки «величайших» сегодня стало модно, и я готов побиться об заклад, что в списке, составленном любым современным математиком, уроженец Швейцарии Леонард Эйлер (1707–1783) занял бы одно из первых пяти мест (конкуренцию ему составили бы Архимед, Ньютон и Гаусс, но оцените, какова компания!).

Ну а теперь, прежде чем пускаться в объяснение особенностей *e*, π и $\sqrt{-1}$, не сказать ли пару слов о дерзком заявлении, которое я позволил себе в предисловии, назвав выражение $e^{i\pi} + 1 = 0$ «квинтэссенцией красоты»? Это не пустые слова, и на самом деле у меня есть «официальное право» на такое мнение. В номере ежеквартального журнала *Mathematical Intelligencer*, спонсируемого престижным издательством книг и журналов по математике Springer-Verlag, вышедшем осенью 1988 года, было открыто голосование за самую красивую математическую теорему. Читателей *Intelligencer*, а едва

---

* *e*, возведенное в степень пи ай,
Плюс 1 будет ноль, чистый ноль – проверяй.
Эйлер был в изумленье.
С его-то уменьем,
Да и мы до сих пор говорим только «вай». – *Прим. перев.*

ли не все они – математики, работающие в академических учреждениях и в промышленности, попросили выставить 24 теоремам из предложенного списка оценки от 0 до 10, причем 10 означала «наиболее красивая», а 0 – «наименее красивая». Помимо $e^{i\pi} + 1 = 0$, в список входили такие основополагающие теоремы, как:

(a) множество простых чисел бесконечно;
(b) не существует рационального числа, квадрат которого равен 2;
(c) число π трансцендентно;
(d) любое непрерывное отображение замкнутого единичного круга в себя имеет неподвижную точку.

Выдающийся список, ничего не скажешь.

Результаты 68 полученных ответов были объявлены в летнем выпуске за 1990 год. Максимальную среднюю оценку 7.7 получило уравнение $e^{i\pi} + 1 = 0$. Для сравнения: теорема (a) получила оценку 7.5, (b) – 6.7, (c) – 6.5 и (d) – 6.8. Наименьшую среднюю оценку 3.9 получил результат из теории чисел, доказанный гениальным индийским математиком Рамануджаном. Итак, вот *официальный* вывод: $e^{i\pi} + 1 = 0$ – самое красивое уравнение в математике! (Надеюсь, читатели в большинстве своем понимают, что я говорю это не всерьез, и не будут заваливать меня гневными письмами с объяснением того, почему их любимое уравнение не в пример красивее.)

Конечно, приведенные выше формулировки несколько небрежны, ведь $e^{i\pi} + 1 = 0$ вообще-то *не* уравнение. Уравнением (с одной переменной) называется математическое выражение вида $f(x) = 0$, например $x^2 + x - 2 = 0$, которое истинно лишь для некоторых значений переменной, а именно для *решений* уравнения. Так, для приведенного выше квадратного уравнения $f(x)$ обращается в ноль *только* при $x = -2$ и $x = 1$. Однако в выражении $e^{i\pi} + 1 = 0$ нет никакого x, так что это не уравнение. Но это и не тождество, как, например, тождество Эйлера $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, где θ – произвольный угол, а не только π радиан. Действительно, *тождеством* (с одной переменной) называется утверждение, верное для любого значения переменной. Но в выражении $e^{i\pi} + 1 = 0$ вообще нет переменных, а только пять констант. (Тождество Эйлера – главное в этой книге, и мы докажем его в главе 1.) Итак, $e^{i\pi} + 1 = 0$ и не уравнение, и не тождество. Тогда что же это? Это *формула* или *теорема*.

Но нам важнее не семантика, а вопрос, поднятый мной в предисловии, – красота. Что могли бы означать слова о том, что математическое утверждение «красиво»? На этот вопрос я отвечаю так: что могли бы означать слова о том, что спящий котенок, парящий орел, лошадь, скачущая во весь опор, или смеющийся ребенок, или … красивы? Самый простой ответ – красота в глазах смотрящего (полагаю, это и есть окончательное «объяснение» популярности капельных картин Джексона Поллока), но я думаю (по крайней мере, в математическом смысле), что можно копнуть и глубже. Например, автор опроса в *Intelligencer* (Дэвид Уэллс, автор многих популярных работ по математике) внес несколько хороших предложений о том, что делает математическое выражение *красивым*.

Чтобы считаться красивым, пишет Уэллс, математическое утверждение должно быть простым, кратким, важным и очевидным, когда оно уже высказано, но таким, что мимо него легко пройти, т. е. *неожиданным*. (Похожий перечень ранее был сформулирован Э. Х. Хантли (H. E. Huntley) в вышедшей в 1970 году книге «The Divine Proportion»*.) Я думаю, что тождество Эйлера (и следствие из него, $e^{i\pi} + 1 = 0$) удовлетворяет всем четырем критериям, и полагаю, что, прочитав книгу до конца, вы будете думать так же. Но с этим согласны не все, что не должно вызывать удивления – с *любым* утверждением кто-нибудь да не согласен! Например, французский математик Франсуа Ле Лионне (François Le Lionnais) (1901–1984) начал с высокой оценки, написав, что $e^{i\pi} + 1 = 0$

> …устанавливает между важными для математики числами 1, π и e [по какой-то причине Ле Лионне опустил числа 0 и i] связь, которая в свое время казалась фантастической. Было общепризнано, что это «самая важная формула в математике»[4].

Но затем следует неожиданная развязка, тортом в лицо: «В наши дни внутренние причины такой взаимосвязи стали настолько очевидны [!], что эта формула кажется если не малосодержательной, то, по крайней мере, совершенно естественной».

Что ж, позавидуем Франсуа и его великому дару провидения (или лучше сказать, заднему уму?), но подобное утверждение мы с полным правом можем встретить с таким же скептицизмом, какой выказывает большинство математиков, когда кто-то говорит, что способен «видеть геометрические формы в четвертом измерении». Это ему только кажется. Он, конечно, «видит что-то», не будем спорить, но я сильно сомневаюсь, что видит он истинную

---

* Божественная пропорция. – *Прим. перев.*

геометрию гиперпространства. Когда вы прочтете эту книгу до конца, формула $e^{i\pi} + 1 = 0$ *станет* для вас «очевидной», но назвать ее *малосодержательной*? Да никогда!

В этот момент для полноты картины я должен упомянуть великого английского математика Г. Х. Харди (G. H. Hardy) (1887–1947), у которого был очень странный взгляд на красоту в математике: чтобы быть красивой, математика должна быть *бесполезной*! Это условие недостаточно, но крайний пурист Харди считал его необходимым. Это эпатажное утверждение он высказал в своей знаменитой книге «Апология математика», вышедшей в 1940 году. Я не могу поверить, что сегодня найдется математик (хоть какой пурист), который разделил бы высокомерие Харди. На самом деле я думаю, что хорошо известный интерес Харди к рядам и интегралам Фурье, т. е. к той области математики, *без которой к 1940 году уже не могли обходиться практические, «с грязью под ногтями» инженеры-электрики* (мы убедимся в этом в главах 5 и 6), сам по себе доказывает, что эти слова были неправдой даже в тот момент, когда он их писал. Продолжая разговор о странных воззрениях Харди на этот предмет, скажу, что он называл физиков Джеймса Клерка Максвелла (1831–1879) и Дирака «настоящими» математиками. Это забавно, потому что уравнения электромагнитного поля Максвелла – как раз то, что делает возможными еще как *полезные* радиоустройства и сотовые телефоны, а Дирак очень ценил свое обучение на факультете электротехники, считая, что именно оно вдохновило его на очень нестрогое введение импульсной «функции»* в квантовую механику[5]!

В качестве контрапункта математической красоты будет, наверное, полезно привести хотя бы краткий пример математического *уродства*. Рассмотрим данное в 1976 году «доказательство» теоремы о четырех красках для планарных карт. Теорема утверждает, что четырех красок *необходимо* и достаточно для раскраски любой планарной карты, так чтобы страны, имеющие общую границу, были разного цвета[6]. Эта проблема, поставленная в 1852 году, не поддавалась никаким атакам, пока два математика из Иллинойского университета не запрограммировали компьютер для автоматической «проверки» многих сотен особых случаев. Детали сейчас неважны – я хочу лишь сказать, что именно на это доказа-

* В отечественной литературе больше распространено название «дельта-функция Дирака». – *Прим. перев.*

тельство математики чаще всего ссылаются, когда их просят привести пример самого уродливого в математике. Если вам кажется, что это слишком грубое слово, то позвольте заверить, что я употребил его не первым. Те самые два программиста из Иллинойса рассказывали о реакции своего друга-математика, узнавшего, что они воспользовались компьютером[7]: «Господь никогда не должен был допустить, чтобы лучшее доказательство такой красивой теоремы было настолько уродливо».

Хотя почти все математики не сомневаются в результате, почти никому не нравится способ, каким он был получен, поскольку выполняемые компьютером вычисления скрывают детали так называемого «решения». Как писал английский математик Огастес де Морган (1806–1871), впервые сформулировавший проблему четырех красок, в своей книге «Budget of Paradoxes»: «Для доказательства нужен **человек**, который может его дать, и **человек**, который может воспринять» (выделено мной). Здесь нет ни слова об автоматической машине, выполняющей сотни миллионов промежуточных вычислений (требующих несколько недель работы на суперкомпьютере), которые ни один человек не сможет осилить[8].

Прежде чем оставить тему доказательств с помощью компьютера, я должен признать, что в одном случае такой подход все-таки может приводить к красивой математике. Представьте, что, в отличие от проблемы четырех красок, компьютер нашел один или несколько контрпримеров, опровергающих гипотетическую теорему. Затем эти контрпримеры может уже традиционным способом проверить любой заинтересованный человек. Подобный пример, связанный с Эйлером, восходит еще к 1769 году[9]. Опровержение утверждения путем предъявления контрпримера – быть может, самый убедительный из всех методов (тот факт, что контрпример был найден компьютером, уже не имеет значения, коль скоро контрпример налицо), и математики в целом согласны, что это красивая техника.

Есть, конечно, немало красивых математических утверждений, которые, на мой взгляд, могли бы составить конкуренцию формуле $e^{i\pi} + 1 = 0$, но отсутствовали в списке *Intelligencer*. Просто для примера рассмотрим сначала бесконечный ряд

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots .$$

Это так называемый *гармонический ряд*, а вопрос заключается в том, конечна или бесконечна его сумма S, т. е. *сходится* ряд или *расходится*? Почти все, кто видит его в первый раз, думают, что S должна быть конечна (математики говорят, что S *существует*), поскольку каждый следующий член меньше предыдущего. Действительно, члены стремятся к нулю, и это условие в самом деле *необходимо* для сходимости ряда к конечной сумме, но его не *достаточно*. Чтобы ряд сходился, члены должны не только стремиться к нулю, но и стремиться *достаточно быстро*, а в случае гармонического ряда это не так (кстати, если знаки членов гармонического ряда чередуются, то сумма *конечна* и равна ln(2)). Таким образом, мы имеем красивое и *неожиданное* утверждение

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}=\infty,$$

известное примерно с 1350 года. Эту теорему, на мой взгляд, следовало включить в список *Intelligencer*[10].

Кстати говоря, доказательство этой красивой теоремы – пример красивого математического *рассуждения*. Ниже приведено не оригинальное доказательство (которое тоже изящно, но более широко известно, поэтому я не хочу его повторять[11]). Сначала *предположим*, что гармонический ряд сходится, т. е. что сумма S – какое-то конечное число. Тогда

$$\begin{aligned}
S &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\\
&= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\right)+\frac{1}{2}S.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots.$$

Это означает, что сумма только *нечетных* членов равна половине полной суммы. Следовательно, сумма только *четных* членов тоже должна быть равна половине S, а значит, *предположение* о существовании S привело нас к выводу, что

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots.$$

Но это равенство, очевидно, неверно, т. к. каждый член суммы в левой части больше соответственного члена в правой части ($1 > 1/2$, $1/3 > 1/4$, $1/5 > 1/6$, $\cdots$). Поэтому наше исходное предположение о существовании S неверно, а, значит, S *не* существует, и гармонический ряд расходится. Это красивое рассуждение называется *доказательством от противного*.

Самый знаменитый пример доказательства от противного – данное Евклидом доказательство теоремы (а) из списка *Intelligencer*. Помню, что, впервые увидев (еще в средней школе) эту демонстрацию бесконечности множества простых чисел, я был очарован ее элегантностью и *красотой*. Для меня доказательства от противного стали одним из характерных признаков красивого математического рассуждения. Когда Эндрю Уайлс (1953) в 1995 году наконец-то «добил» последнюю теорему Ферма, он воспользовался доказательством «от противного». И доказательство иррациональности π^2 с помощью формулы Эйлера, которое я приведу в главе 3, тоже ведется «от противного».

Однако знаменитую интеллектуалку, обладательницу «самого высокого в мире IQ» Мэрилин вос Савант такой способ рассуждений не впечатляет, она отвергает *любое* доказательство от противного. В своей скандально (и бесславно) известной книге, посвященной доказательству Уайлса, она пишет:

> Но как вообще можно что-то действительно доказать от противного? Взять, к примеру, мнимые числа. Квадратный корень из $+1$ – вещественное число, потому что $+1\times+1=+1$; однако квадратный корень из -1 – мнимое число, потому что -1, помноженное на -1, тоже равно $+1$, а не -1. Налицо противоречие. [Где здесь «противоречие», я не вижу и представления не имею, почему она так говорит.] Тем не менее против него никто не возражает, и мнимые числа используются повсеместно. Но как же мы можем оправдать их использование, чтобы *доказать* противоречие?

Разумеется, это, как написали два рецензента книги, пример «бессмысленного рассуждения» (характеризуя ее книгу, употребляли также слово *drivel* – околесица)[12], и позвольте заверить, что доказательство от противного – самая что ни на есть законная техника.

Представьте мое удивление, когда я читаю, что два весьма уважаемых математика называют такую демонстрацию «аргументом умника»! Очевидно, они шутили, но фраза меня задела. Я не буду приводить здесь доказательство бесконечности множества простых чисел, данное Евклидом (его можно найти в любом учебнике теории чисел), но позвольте мне повторить, что написали Филип Дэвис (Philip Davis) и Рубен Херш (Reuben Hersh) в получившей известность книге «The Mathematical Experience», вышедшей в 1981 году, по поводу традиционного доказательства от противного теоремы (b) из списка *Intelligencer*. Чтобы доказать иррациональность числа $\sqrt{2}$, предположим, что оно *рационально*. То есть *предположим* (как сделал Пифагор в VI веке до н. э.), что существуют два целых числа m и n таких, что

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Можно также считать, что m и n не имеют общих делителей, потому что если бы таковые *были*, то мы могли бы просто сократить их и назвать то, что останется, m и n.

Возводя в квадрат, получаем, что $2n^2 = m^2$, и, значит, m^2 четно. Но тогда и само m четно, потому что нельзя получить четное число путем возведения в квадрат нечетного (любое нечетное число имеет вид $2k + 1$ для некоторого целого k, а $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ – тоже нечетное число). Но раз m четно, то должно существовать такое целое r, что $m = 2r$. Следовательно, $2n^2 = 4r^2$, или $n^2 = 2r^2$, а это значит, что n^2 четно. Но тогда и n четно. Таким образом, мы пришли к выводу, что m и n должны быть четными, если целые m и n вообще существуют. Но в самом начале мы предположили, что у m и n нет общих делителей (и, в частности, не является общим делителем число 2), поэтому наше предположение о том, что m и n существуют, привело к логическому противоречию. Стало быть, m и n *не* существуют! До чего красивое доказательство – в нем используется только идея о том, что множество целых чисел можно разбить на два непересекающихся подмножества – четных и нечетных чисел.

Однако Дэвид и Херш не разделяют моего мнения и, помимо характеристики «от умника», утверждают, что в этом доказательстве есть еще одна проблема: «акцент на логическую неотвратимость, который выглядит тяжеловесно и кропотливо». Но позвольте, такая проблема просто обязана быть у любого доказательства! Однако удивительно для меня другое – что именно они выдают за лучшее доказательство. Оно повторяет предыдущее до шага, на котором устанавливается, что $2n^2 = m^2$. Затем, говорят они, представим, что m и n разложены в произведение простых множителей. Тогда m^2 состояло бы из последовательности пар простых чисел (потому что $m^2 = m \cdot m$), и то же самое можно сказать о n^2. А теперь процитирую кульминационный момент:

> Но (ага!) в произведении $2n^2$ у 2 нет пары. Противоречие.

Гм. В *чем же* противоречие? А дело в том, что они воспользовались (хотя явно об этом не упоминают) «основной теоремой арифметики», согласно которой разложение любого целого числа (мы говорим об обыкновенных целых числах) в произведение простых чисел *единственно*. Они даже признают это, отмечая: «На самом деле мы опустили некоторые формальные детали». Да уж!

Дэвис и Херш заявляют, что их доказательству отдадут предпочтение перед пифагоровым «девять из десяти профессиональных математиков, потому что оно вызывает больший эстетический восторг». Быть может, они и правы, но *лично я* думаю, что неупомянутая единственность разложения на множители – довольно большой зияющий провал, через который трудно перешагнуть. Для обыкновенных чисел доказать это нетрудно, но все же нетривиально и уж вовсе неочевидно. На самом деле нетрудно создать другие подмножества вещественных чисел, для которых это утверждение вообще неверно[13]! Поэтому это «ага!» вызывает у меня очень большие сомнения. Нет сомнений, что для него требуется куда больше, чем идея четности и нечетности, которой вполне достаточно в доказательстве, данном Пифагором.

В качестве второго примера красивого математического выражения, которым мы обязаны Эйлеру, рассмотрим разложение синуса в бесконечное произведение:

$$\sin(x) = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Не нужно быть большим специалистом по математике, чтобы «осознать», что это весьма удивительное утверждение (и, наверное, многие сочтут его «красивым»). Я думаю, его способен оценить любой старшеклассник, изучавший только алгебру и тригонометрию. А чтобы проиллюстрировать его важность, скажу, что от него всего несколько шагов до такой формулы:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}=1.644934\cdots,$$

которая сама по себе – образец математической красоты (ниже в этой книге я покажу, как ее вывести другим, не эйлеровым способом)[14]. Неудачные попытки вычислить сумму $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ приводили в отчаяние математиков, начиная еще с итальянца Пьетро Менголи (Pietro Mengoli) (1625–1686), который первым формально поставил эту задачу в 1650 году, хотя наверняка многие математики и до него размышляли об этом естественном обобщении гармонического ряда. И наконец, в 1734 году Эйлер решил эту задачу[15]. Все это красивые вещи, но все-таки я думаю, что $e^{i\pi}+1=0$ лучше всех. Отчасти это связано с тем, что разложение $\sin(x)$ в бесконечное произведение можно вывести благодаря тесной связи между $\sin(x)$ и $i=\sqrt{-1}$, которую устанавливает тождество Эйлера (снова см. примечание 14).

И позвольте мне закончить это краткое эссе допущением, что, быть может, математическая красота *действительно* в глазах смотрящего, как и красота живописи Джексона Поллока. Например, в 1935 году английский математик Дж. Н. Ватсон в конце своего президентского послания Лондонскому математическому обществу писал, что одна конкретная формула вызвала в нем «трепет, неотличимый от того, что я испытал, когда ступил в Новую ризницу Капеллы Медичи и узрел перед собой строгую красоту четырех скульптур, символизирующих День, Ночь, Вечер и Утро, которые Микеланджело поставил над гробницами Джулиано Медичи и Лоренцо Медичи»[16]. О да, это действительно трепет!

В серии лекций, прочитанных перед публикой в Парижском музее науки в начале 1980-х годов, математик из Йельского университета Серж Ленг (Serge Lang) попытался объяснить, что он считает красивой математикой, прибегнув к не столь патетическим образам, как Ватсон[17]. Он не давал формального определения, но несколько раз сказал, что, видя красоту, всегда распознает ее по «мурашкам по спине». Фраза Ленга напоминает мне о судье Верховного суда США Поттере Стюарте, который в решении 1964 года по делу о порнографии написал свою крылатую фразу: он не может определить, что это такое, но «узнает, когда увидит». Быть может, на другом конце интеллектуального спектра дело обстоит так же, как с красивой математикой.

Способность оценить красивую математику – это привилегия, и есть много образованных в другом отношении людей, которые, как это ни грустно, не понимают, что упускают нечто очень ценное. В автобиографических воспоминаниях, которые Чарльз Дарвин в 1876 году написал для своих детей, он так выражал свои чувства по этому поводу:

> Три года, проведенных мною в Кембридже, были в отношении академических занятий полностью затрачены впустую… Я пытался заняться математикой и даже отправился для этого в Бармут летом 1828 г. с частным преподавателем… но занятия мои шли крайне вяло. Они вызывали у меня отвращение главным образом потому, что я не в состоянии был усмотреть какой-либо смысл в первых основаниях алгебры. Это отсутствие у меня терпения было очень глупым, и впоследствии я глубоко сожалел о том, что не продвинулся по крайней мере настолько, чтобы уметь хотя бы немного разбираться в великих руководящих началах математики, ибо *люди, овладевшие ею, кажутся мне наделенными каким-то добавочным орудием разума* [выделено мной][18].

Лимериком я начал этот раздел, лимериком же хочу и закончить. Думаю, что если вы прочтете эту книгу до конца, то, в отличие от профессора Пирса, согласитесь со следующими строками (впрочем, я подозреваю, что первые две к вам не относятся!):

I used to think math was no fun,
'Cause I couldn't see how it was done.
Now Euler's my hero
For I now see why zero,
Equals $e^{\pi i} + 1$*.

Ну и хватит дурной поэзии. Перейдем к чему-нибудь получше. Займемся математикой комплексных чисел.

* Я-то думал, что математика как стрихнин,
Не видал в ней ни смысла, ни первопричин.
Только Эйлер-король
Объяснил мне, что ноль
Равен $e^{\pi i} + 1$. – *Прим. перев.*

ГЛАВА 1

Комплексные числа

1.1. «Тайна» $\sqrt{-1}$

Много лет назад один выдающийся математик написал следующие слова, которые некоторым читателям могут показаться несколько неожиданными:

> Недавно я встретил человека, который сказал, что не верит не то что в квадратный корень из минус единицы, но и в минус единицу. И такое мнение не редкость. Наверняка есть много людей, которые не видят ничего странного в $\sqrt{2}$, но воротят нос от $\sqrt{-1}$. А все потому, что думают, будто первое могут наглядно представить себе как нечто существующее в физическом мире, а второе – нет. Но на самом деле $\sqrt{-1}$ – куда более простая концепция[1].

Я говорю «несколько неожиданными», потому что в книге «An Imaginary Tale» уделил много места описанию путаницы по этому поводу, царившей в умах многих очень умных мыслителей прошлых веков.

Нетрудно понять, что смущало первооткрывателей в вопросе о $\sqrt{-1}$. В множестве обыкновенных вещественных чисел у каждого положительного числа есть два вещественных квадратных корня (а у нуля всего один). Но у отрицательного вещественного числа нет вещественного квадратного корня. Так, чтобы найти решение уравнения $x^2 + 1 = 0$, мы должны «выйти за пределы» множества вещественных чисел в более широкую область комплексных чисел. Именно это расширение и стало камнем интеллектуального преткновения на пути к пониманию того, что значит, что $\sqrt{-1}$ «решает» уравнение $x^2 + 1 = 0$. Однако мы можем вообще обойти это расширение[2], если взглянем на проблему с совершенно новой (отнюдь не очевидной) точки зрения.

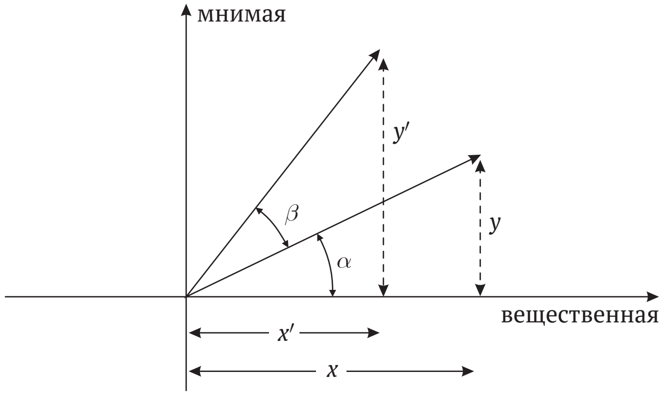

Рис. 1.1.1. Поворот вектора

В разделе математики, который называется *теорией матриц* и который начал разрабатываться в 1850 году, формально иллюстрируется (я так думаю), что мог иметь в виду цитированный выше автор. На рис. 1.1.1 мы видим *вектор* комплексного числа $x + iy$, который составляет угол α с положительным направлением вещественной оси, и другой вектор, полученный *поворотом* первого на угол β против часовой стрелки, – он представляет комплексное число $x' + iy'$. Конечно, оба вектора имеют одинаковую длину r, поэтому $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. По рисунку сразу следует, что $x = r\cos(\alpha)$ и $y = r\sin(\alpha)$, а значит, пользуясь формулами синуса и косинуса суммы углов, получаем:

$$x' = r\cos(\alpha + \beta) = r[\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)];$$
$$y' = r\sin(\alpha + \beta) = r[\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)].$$

Теперь заменим в этих уравнениях x', y' на $r\cos(\alpha)$ и $r\sin(\alpha)$ соответственно. Тогда

$$x' = x\cos(\beta) - y\sin(\beta);$$
$$y' = y\cos(\beta) + x\sin(\beta) = x\sin(\beta) + y\cos(\beta).$$

Если записать эту пару уравнений в *матричном* виде, то получим:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\beta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{R}(\beta)$ – *двумерный матричный оператор поворота* (в главе 3 при доказательстве иррациональности π^2 мы встретим еще один оператор – *дифференцирования*). Это означает, что вектор-столбец $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ под воздействием оператора $\mathbf{R}(\beta)$ (т. е. при умножении на него[3]) поворачивается против часовой стрелки на угол β и переходит в вектор-столбец $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.

Поскольку поворот против часовой стрелки на угол $\beta = 90°$ – то же самое, что умножение $x + iy$ на i, получается, что $i = \sqrt{-1}$ можно ассоциировать с такой матрицей $\mathbf{R}(90°)$ размера 2×2:

$$\begin{bmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) \\ \sin(90°) & \cos(90°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Означает ли это, что мы можем с полным основанием назвать ее *мнимой матрицей*? Чтобы понять, почему это имеет смысл, а это и в самом деле имеет *очень большой* смысл, напомним, что единичная матрица размера 2×2

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

обладает тем свойством, что для любой матрицы $\mathbf{A}$ размера 2×2 $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$. То есть $\mathbf{I}$ играет в матричной арифметике ту же роль, что 1 в арифметике обыкновенных вещественных чисел. Вся «тайна» $\sqrt{-1}$ заключается в том, что это число, являющееся корнем уравнения $i^2 = -1$, определенного над множеством обыкновенных вещественных чисел, само этому множеству *не* принадлежит. Но на множестве матриц размера 2×2 такой «тайны» нет, поскольку квадрат «мнимой» матрицы (самой что ни на есть обыкновенной матрицы 2×2) равен

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbf{I}.$$

То есть в отличие от обыкновенных вещественных чисел, в множестве матриц 2×2 имеется элемент, квадрат которого равен единичной матрице со знаком минус, а единичная матрица играет в этом множестве роль единицы.

Мы можем еще продолжить аналогию с вещественными числами, определив *нулевую* матрицу 2×2 $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, – при умножении любой матрицы 2×2 на $\mathbf{0}$ получается $\mathbf{0}$. Кроме того, для любого вещественного числа a, отличного от нуля, имеет место равенство $(1/a)\,a = 1$ (число $1/a$ является *обратным к* a), и точно так же мы называем матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ *обратной к* $\mathbf{A}$, если $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. (Из этой нотации сразу вытекает, что $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$.) Но не следует заходить с аналогией между матрицами 2×2 и обыкновенными вещественными числами слишком далеко. Между ними есть существенные различия. Например, для числа 1 существуют два квадратных корня -1 и 1. И для его матричного аналога $\mathbf{I}$ матрицы $-\mathbf{I}$ и $\mathbf{I}$ тоже являются квадратными корнями (мы говорим, что матрица $\mathbf{S}$ является квадратным корнем из $\mathbf{A}$, если $\mathbf{S}^2 = \mathbf{SS} = \mathbf{A}$). Но для $\mathbf{I}$ существует еще *бесконечно много* квадратных корней! В этом легко убедиться, записав $\mathbf{S}$ в виде

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix},$$

а затем приравняв $\mathbf{S}^2 = -\mathbf{I}$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & cb + a^2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, a, b и c могут быть *любыми* вещественными числами, удовлетворяющими условию $a^2 + bc = 1$. На самом деле они даже не обязаны быть вещественными. Если $a = \sqrt{2}$, то $bc = -1$, и этому условию удовлетворяют, например, $b = c = i$. Следовательно, матрица

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & i \\ i & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

тоже является квадратным корнем из **I**. Но еще более удивительным, чем бесконечное число квадратных корней, является тот факт, что произведение двух *ненулевых* матриц может быть равно нулю! В множестве вещественных чисел нет ничего подобного. В качестве примера этого поразительного явления предлагаю вам убедиться, что произведение матриц

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

равно $\mathbf{0}$, хотя $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$. Матрицы *совсем не похожи* на числа.

Это может показаться просто жонглированием символами, но на самом деле все гораздо серьезнее. И вот почему. Предположим, что мы последовательно применили *два* поворота к произвольному вектору $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$: сначала на угол β, а затем на угол α, т. е.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{R}(\beta)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Результат должен быть таким же, как при *одном* повороте на угол $\alpha + \beta$, и при этом не важно, какой поворот был первым. Это значит, что оператор поворота **R** должен обладать следующими двумя свойствами:

$$\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{R}(\beta) = \mathbf{R}(\alpha + \beta);$$
$$\mathbf{R}(\alpha)\mathbf{R}(\beta) = \mathbf{R}(\beta)\mathbf{R}(\alpha).$$

Второе утверждение означает, что **R** обладает весьма специальным свойством *коммутативности* (снова см. примечание 3). Но именно в первом утверждении скрыт по-настоящему элегантный результат. Оно говорит, что если последовательно выполнить n поворотов на один и тот же угол β, то получится такой же результат, как при одном повороте на угол $n\beta$. То есть для любого целого n (положительного, отрицательного или равного нулю) имеет место тождество

$$\boxed{\mathbf{R}^n(\beta) = \mathbf{R}(n\beta),}$$

представляющее собой *матричную* форму формулы Муавра (я скоро объясню, что это значит). Иначе говоря,

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos(n\beta) & -\sin(n\beta) \\ \sin(n\beta) & \cos(n\beta) \end{bmatrix}.$$

Интересен частный случай при $n = -1$:

$$\mathbf{R}^{-1}(\beta) = \mathbf{R}(-\beta).$$

Это означает, что $\mathbf{R}(-\beta)$ – обращение оператора $\mathbf{R}(\beta)$. Вообще говоря, вычисление обратной матрицы – нетривиальное занятие, но матрица поворота является исключением из этого правила. Ведь обращением поворота против часовой стрелки на угол β является просто поворот на тот же угол по часовой стрелке (или, эквивалентно, поворот против часовой стрелки на угол $-\beta$). Таким образом,

$$\mathbf{R}^{-1}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & -\sin(-\beta) \\ \sin(-\beta) & \cos(-\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}.$$

Мы можем проверить, что эта матрица обладает надлежащим поведением, выполнив прямое вычисление:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1}(\beta)\mathbf{R}(\beta) &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\beta) + \sin^2(\beta) & -\cos(\beta)\sin(\beta) + \sin(\beta)\cos(\beta) \\ -\sin(\beta)\cos(\beta) + \cos(\beta)\sin(\beta) & \sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Оставляю вам проверку того, что $\mathbf{R}(\beta)\mathbf{R}^{-1}(\beta) = \mathbf{I}$.

Матрица $\begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$ поворачивает вектор $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ на угол β против часовой стрелки. То же самое получается при умножении вектора на $e^{i\beta} = \cos(\beta) + i\sin(\beta)$. Следовательно, матричное тождество, обведенное выше рамочкой, просто означает, что $(e^{i\beta})^n = e^{in\beta}$ (что вряд ли вызовет удивление!), а формула Эйлера принимает вид:

$$[\cos(\beta) + i\sin(\beta)]^n = \cos(n\beta) + i\sin(n\beta),$$

т. е. мы получили хорошо известную формулу Муавра. Так что складывается впечатление, что введение матричной нотации не дало ничего такого, чего мы не знали. Это не совсем так (чуть ниже я объясню, почему); но пока возникает интересный вопрос: можно ли, не привлекая *физическое* понятие поворота, доказать *математическое* тождество

$$\begin{bmatrix}\cos(\beta) & -\sin(\beta)\\ \sin(\beta) & \cos(\beta)\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}\cos(n\beta) & -\sin(n\beta)\\ \sin(n\beta) & \cos(n\beta)\end{bmatrix}?$$

Ответ утвердительный, по крайней мере при положительном целом n, хотя все равно придется обратиться к комплексным числам. Случаи $n = 0$ и 1, разумеется, тривиальны.

Чисто математическое доказательство, которое я представлю в следующем разделе, основано на, быть может, самой известной теореме матричной алгебры – *теореме Кэли–Гамильтона*, названной в честь английского математика Артура Кэли (1821–1895) и ирландского математика Уильяма Роуэна Гамильтона (1805–1865). В частности, о Кэли, который в математике был таким пуристом, что сама мысль о физических аргументах вызвала бы у него *отвращение*, великий физик Джеймс Клерк Максвелл (в честь которого названы «уравнения электромагнитного поля Максвелла») писал: «Душа которого, слишком огромная для вульгарного пространства, обитала в n измерениях».

1.2. Теорема Кэли–Гамильтона и формула Муавра

Формулировка теоремы Кэли–Гамильтона обманчиво проста. Она применима ко всем квадратным матрицам любого размера ($n\times n$, где n – любое положительное целое число), но для нас представляет интерес только случай $n = 2$. Начнем с того, что *определителем* произвольной матрицы $\mathbf{A}$ размера 2×2 называется следующее число:

$$\det\mathbf{A} = \det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

т. е. определитель $\mathbf{A}$ – это разность произведений элементов на двух диагоналях.

Далее определим *характеристический полином* $\mathbf{A}$ как полином от скалярного параметра λ, вычисляемый по формуле

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}).$$

Уравнение $p(\lambda) = 0$ называется *характеристическим уравнением* $\mathbf{A}$. Например, если $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, то имеем

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix},$$

и, следовательно, характеристический полином $\mathbf{A}$ имеет вид

$$p(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8,$$

т. е. $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$. Решения характеристического уравнения $p(\lambda) = 0$ называются *характеристическими числами*, или *собственными значениями* $\mathbf{A}$. В этом примере, поскольку $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$, $\mathbf{A}$ имеет два характеристических числа: $\lambda = 5$ и $\lambda = -1$.

После этих вступительных слов мы готовы сформулировать теорему Кэли–Гамильтона: любая квадратная матрица $\mathbf{A}$ удовлетворяет своему собственному характеристическому уравнению, т. е. подстановка $\mathbf{A}$ вместо λ в уравнение $p(\lambda) = 0$ дает $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. В нашем примере теорема Кэли–Гамильтона утверждает, что $\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} - 5\mathbf{I} = 0$, в чем вы легко сможете убедиться самостоятельно. На самом деле для случая 2×2 вообще легко выполнить алгебраические преобразования в общем виде и показать, что характеристическое уравнение

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

действительно обращается в тождество, если подставить $\mathbf{A}$ вместо λ. Именно это и проделал сам Кэли. Он доказал теорему не для всех положительных n, а только (в 1858 году) для $n = 2$ и $n = 3$, проведя все алгебраические выкладки (в случае $n = 3$ повозиться придется гораздо дольше, чем при $n = 2$). Имя Гамильтона было добавлено, потому что он не поленился выполнить еще более сложные выкладки для случая $n = 4$. Но для произвольного n «алгебраические выкладки», очевидно, путь в никуда. Доказательство в общем случае требует более серьезного математического аппарата, чем я готов представить в этой книге (да нам-то все равно нужен только случай 2×2), поэтому я просто отсылаю вас к любому достаточно полному учебнику линейной алгебры и теории матриц.

Ну хорошо, а нам-то чем полезна теорема Кэли–Гамильтона? Одно из основных ее применений в прикладной математике, технике и физике – вычисление больших степеней матрицы. Зная $\mathbf{A}$, легко непосредственно вычислить $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ и $\mathbf{A}^4$ (если $\mathbf{A}$ не слишком большая), но даже для матрицы размера 2×2 просьба вычислить $\mathbf{A}^{3973}$ заставит призадуматься. А такие вычисления не редкость, например марковские цепи в теории вероятностей и теория автоматического управления в технике[4]. Конечно, современные компьютеры позволяют вычислять большие степени матрицы легко и быстро (пакет MATLAB, который использовался для создания всех графиков в этой книге, вычисляет $\mathbf{A}^{3973}$ для матрицы 2×2 в мгновение ока). Но нас-то интересует *математическое* решение (которое затем можно будет использовать для выведения матричной формы формулы Муавра для целого $n \geq 0$).

Для матрицы 2×2 характеристический полином квадратично зависит от λ, поэтому характеристическое уравнение $p(\lambda) = 0$ можно записать в общем виде $\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2 = 0$, где α_1 и α_2 – константы. Таким образом, по теореме Кэли–Гамильтона, $\mathbf{A}^2 + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{I} = 0$. Теперь разделим λ^n на $\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2$. В общем случае мы получим частное в виде полинома степени $n - 2$ и остаток – *полином степени не больше 1* (такое рассуждение, очевидно, не проходит для $n < 2$, и это ограничение означает, что наш метод, хотя и математически чистый, все же не такой общий, как физическая идея поворота из предыдущего раздела, у которой такого ограничения нет), т. е.

$$\frac{\lambda^n}{\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2} = q(\lambda) + \frac{r(\lambda)}{\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2},$$

где $r(\lambda) = \beta_2\lambda + \beta_1$, а β_2 и β_1 – постоянные. Иначе говоря,

$$\boxed{\lambda^n = (\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2)q(\lambda) + \beta_2\lambda + \beta_1.}$$

Это полиномиальное тождество относительно λ, и еще одна теорема матричной алгебры утверждает, что после замены λ матрицей $\mathbf{A}$ тождество сохранится, но уже матричное. (Доказать ее нетрудно, но я лишь ограничусь замечанием, что это утверждение правдоподобно, а за формальным доказательством отсылаю вас к учебнику линейной алгебры.) Таким образом,

$$\mathbf{A}^n = (\mathbf{A}^2 + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{I})\mathrm{q}(\mathbf{A}) + \beta_2\mathbf{A} + \beta_1\mathbf{I}.$$

Но поскольку $\mathbf{A}^2 + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{I} = 0$ в силу теоремы Кэли–Гамильтона, то

$$\mathbf{A}^n = \beta_2\mathbf{A} + \beta_1\mathbf{I}.$$

Осталось только определить постоянные β_1 и β_2, а это уже совсем просто. Вот как это делается.

Вернемся к тождеству в рамке выше, которое выполняется *для всех* λ, и подставим в него оба характеристических числа λ_1 и λ_2 (для которых, по определению, $\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2 = 0$). Тогда

$$\lambda_1^n = \beta_2\lambda_1 + \beta_1,$$
$$\lambda_2^n = \beta_2\lambda_2 + \beta_1.$$

Из этих уравнений легко выразить β_1 и β_2 через λ_1 и λ_2, оставляю эти алгебраические преобразования вам. В результате получим

$$\beta_1 = \frac{\lambda_2\lambda_1^n - \lambda_1\lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1},$$
$$\beta_2 = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Таким образом, в случае 2×2 общее выражение для $\mathbf{A}^n$ принимает вид

$$\mathbf{A}^n = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}\mathbf{A} + \frac{\lambda_2\lambda_1^n - \lambda_1\lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1}\mathbf{I}.$$

Возникает вопрос: что будет, если $\lambda_1 = \lambda_2$ (тогда в формуле появляется деление на 0). Но с этим легко разобраться, записав $\lambda_1 = \lambda_2 + \varepsilon$ и устремив ε к нулю. Как бы то ни было, нам нужно лишь доказать формулу Муавра, а в этом случае, как мы увидим ниже, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, так что эта проблема к нам не относится.

Мы же имеем

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix},$$

и, следовательно,

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) - \lambda & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) - \lambda \end{bmatrix},$$

поэтому характеристическое уравнение $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ принимает вид $[\cos(\beta) - \lambda]^2 + \sin^2(\beta) = 0$, что сводится к $\lambda^2 - 2\lambda\cos(\beta) + 1 = 0$. Из этого квадратного уравнения мы находим характеристические числа $\lambda_1 = \cos(\beta) - i\sin(\beta)$ и $\lambda_2 = \cos(\beta) + i\sin(\beta)$. Далее, по формуле Эйлера, мы можем переписать λ_1 и λ_2 в виде $\lambda_1 = e^{-i\beta}$, $\lambda_2 = e^{i\beta}$. Подставляя эти экспоненты в общую формулу для $\mathbf{A}^n$, получаем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^n &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}^n \\
&= \frac{e^{i\beta}e^{-in\beta} - e^{-i\beta}e^{in\beta}}{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{in\beta} - e^{-in\beta}}{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}\begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\
&= \frac{e^{-i(n-1)\beta} - e^{i(n-1)\beta}}{2i\sin(\beta)}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2i\sin(n\beta)}{2i\sin(\beta)}\begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\
&= \frac{-2i\sin\{(n-1)\beta\}}{2i\sin(\beta)}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sin(n\beta)}{\sin(\beta)}\begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\dfrac{\sin\{(n-1)\beta\}}{\sin(\beta)} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\sin\{(n-1)\beta\}}{\sin(\beta)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\sin(n\beta)\cos(\beta)}{\sin(\beta)} & -\sin(n\beta) \\ \sin(n\beta) & \dfrac{\sin(n\beta)\cos(\beta)}{\sin(\beta)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\sin(n\beta)\cos(\beta) - \sin\{(n-1)\beta\}}{\sin(\beta)} & -\sin(n\beta) \\ \sin(n\beta) & \dfrac{\sin(n\beta)\cos(\beta) - \sin\{(n-1)\beta\}}{\sin(\beta)} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Далее, $\sin\{(n-1)\beta\} = \sin(n\beta)\cos(\beta) - \cos(n\beta)\sin(\beta)$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(n\beta)\cos(\beta) - \sin\{(n-1)\beta\}}{\sin(\beta)} \\
&\quad = \frac{\sin(n\beta)\cos(\beta) - \sin(n\beta)\cos(\beta) + \cos(n\beta)\sin(\beta)}{\sin(\beta)} \\
&\quad = \cos(n\beta).
\end{aligned}$$