Содержание

Предисловие

Функции типа маленькой волны (всплески, или вейвлеты) в математике возникли достаточно давно при изучении базисов функциональных пространств. Однако только в последние десятилетия они нашли широкие применения в обработке сигналов и изображений. Эти приложения стимулировали мощное развитие теории вейвлетов. Теория вейвлетов является альтернативой анализу Фурье и дает более гибкую технику обработки сигналов. Одно из основных преимуществ вейвлет-анализа заключается в том, что он позволяет заметить хорошо локализованные изменения сигнала, тогда как анализ Фурье этого не дает – в коэффициентах Фурье отражается поведение сигнала за все время его существования. Разработана глубокая и красивая математическая теория вейвлетов [Дб], [М], [НС], [Чуи], [J03].

Из имеющихся на русском языке книг по вейвлетам отметим фундаментальные монографии: И. Добеши [Дб], К. Чуи [Чуи] и Новикова И. Я., Протасова В. Ю., Скопиной М. А. [НПС], Яковлева А. Н. [Я] и Фаркова Ю. А. [Фар]. Издан перевод замечательной книги С. Малла [М] – это наиболее полное учебное пособие по обработке сигналов при помощи вейвлетов. В ней прекрасно сочетаются доступность и глубина изложения. Кроме того, издан еще ряд пособий, среди которых нужно отметить книгу Блаттера К. [Бл], учебные пособия Новикова Л. В. [Но], Петухова А. П. [Пе] и Захарова В. Г. [За]. В книге Дьяконова В. П. [Д] дано описание работы с вейвлетами в системах компьютерной математики Mathcad, MATLAB и Mathematica. Приложениям вейвлетов в компьютерной графике посвящены книги [СДС] и [У].

Данная книга предлагается как учебник по теории вейвлетов и их применениям для студентов по математическим специальностям и направлениям подготовки. Она возникла на основе курса лекций, читаемых автором в течение ряда лет. Чтобы сделать книгу более независимой, в нее включены сведения по рядам и преобразованию Фурье, по фильтрам и разложению сигналов. Теоретический материал не должен быть самоцелью, нужно овладеть и практическими приемами работы с вейвлетами. Поэтому в книгу включено описание основных функций вейвлет-анализа в системе MATLAB и их использования для обработки сигналов. В соответствии с этим книга состоит из двух частей: «Основы теории вейвлетов» и «Вейвлеты в MATLAB». Первая часть книги содержит необходимый теоретический материал, а вторая часть прямо ориентирована на практические занятия по вейвлетам. Выбор системы компьютерной математики MATLAB объясняется тем, что она популярна среди инженеров и математиков, занимающимися прикладными разработками, а также потому, что именно в MATLAB вейвлеты представлены наиболее полно.

Данное издание книги является переработанным и дополненным. Многие вопросы изложены более доступно. Добавлен раздел о гармонических вейвлетах. Рассмотрены масштабирующие функции и вейвлеты в многомерном случае с матричным коэффициентом масштабирования. Добавлено описание новых возможностей пакета Wavelet Toolbox MATLAB.

Рассмотрим кратко содержание книги. Теория вейвлетов широко использует технику рядов Фурье и преобразования Фурье. Поэтому в первой главе излагаются основные факты из этих тем. Даже если сигнал представлен функцией, практически для его анализа берется достаточно плотная выборка значений (дискретизация). Рассмотрены вопросы, которые возникают при дискретизации сигнала, определено дискретное преобразование Фурье и изучаются его свойства. Вейвлет-преобразование сигнала сводится к действию на этот сигнал определенных фильтров. Поэтому в первой главе изложены также основные факты фильтрации сигналов. Рассмотрены вопросы разложения сигнала на сглаженную и высокочастотную компоненты и последующего восстановления сигнала. Хотя первая глава является вспомогательной, результаты последних параграфов существенны для понимания теории вейвлетов и их практических применений.

Вторая глава «Основы теории вейвлетов» является центральной в данной книге. Она содержит изложение основ теории вейвлетов и способов их построения. Начинается изложение с определения масштабирующих функций и построения известного вейвлет-базиса Хаара. На этом примере мы рассматриваем основные конструкции, которые затем последовательно развиваются в следующих параграфах. Рассмотрены примеры масштабирующих функций и соответствующих вейвлетов: Шеннона–Котельникова, Мейера, ортогональных вейвлетов с компактным носителем, биортогональных вейвлетов. Кратко изложены вопросы о двумерных вейвлетах. Рассмотрены непрерывное вейвлет-преобразование и его многомерные обобщения. Достаточно подробно изучаются масштабирующие функции с произвольным натуральным коэффициентом сжатия N и приводятся примеры построения соответствующих вейвлетов. В конце главы рассмотрены масштабирующие функции и вейвлеты в многомерном случае с матричным коэффициентом масштабирования, гармонические вейвлеты и мультивейвлеты. Несмотря на то что в книге изложены не все темы теории вейвлетов, надеюсь, что ее содержание достаточно для первоначального изучения предмета студентами, прослушавшими курс функционального анализа.

Во второй части книги дается описание основных функций системы MATLAB, связанных с вейвлетами и их использованием. Показано, как можно получить значения и построить графики основных типов вейвлетов, как найти масштабирующие фильтры и фильтры разложения и восстановления вейвлетов. Рассмотрены возможности Wavelet Toolbox MATLAB для анализа сигналов, очистки от шума, сжатия. Дано описание применения пакетных вейвлетов и двумерных вейвлетов. Приведены примеры вейвлет-анализа кардиосигнала. Дано описание тестовых сигналов и приведен список всех команд Wavelet Toolbox MATLAB. Для облегчения работы с вейвлетами в MATLAB создан комплекс графических оболочек для вейвлет-анализа и визуализации исходных данных и результатов. Этот комплекс называется главным вейвлет-меню, или графическим интерфейсом пользователя (GUI). В последней главе достаточно подробно рассматривается работа с вейвлетами с использованием графического интерфейса пользователя MATLAB Wavelet Toolbox.

Ссылки на литературу даны, по возможности, на доступные издания.

Надеюсь, что данная книга будет доступна и полезна студентам вузов и специалистам, начинающим использовать вейвлеты в своей работе.

ЧАСТЬ I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕЙВЛЕТОВ

Теория вейвлетов является мощной альтернативой классическому анализу Фурье и дает более гибкую технику обработки сигналов. В то же время она широко использует технику рядов Фурье и преобразования Фурье. Поэтому в первой главе излагаются основные факты из указанных тем, включая дискретное преобразование Фурье и фильтрацию сигналов. Во второй главе рассматриваются основы теории вейвлетов и способов их построения. Рассмотрены примеры масштабирующих функций и соответствующих вейвлетов: Шеннона–Котельникова, Мейера, ортогональные вейвлеты с компактным носителем, биортогональные вейвлеты и вейвлеты с произвольным натуральным коэффициентом сжатия *N*. Рассмотрены непрерывное вейвлет-преобразование и его многомерные обобщения. В конце главы проанализированы масштабирующие функции и вейвлеты в многомерном случае с матричным коэффициентом масштабирования и гармонические вейвлеты.

Преобразование Фурье и фильтры

1

1.1. Преобразование Фурье и фильтры

В данной главе кратко представлены основные сведения по рядам Фурье и преобразованию Фурье, изложены вопросы дискретного преобразования Фурье, фильтров и разложения сигналов.

1.1.1. Предварительные замечания

Напомним понятия, которые далее часто встречаются, и примем некоторые обозначения.

Числовые последовательности $\{x_n\}$, которые мы будем рассматривать, являются «бесконечными в обе стороны», то есть номер n может принимать любые целые значения $n \in \mathbf{Z}$. Числовой ряд $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x_n$ называется сходящимся, если существует предел $\lim_{N,K\to\infty} \sum_{n=-K}^{n=N} x_n$. Степенные ряды рассматриваются как формальные, они содержат отрицательные степени, и вопрос об их сходимости не рассматривается. Такие степенные ряды будут обозначаться следующими символами:

$$\sum_n a_n x^n = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n x^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n .$$

Функции $f(x)$ являются, вообще говоря, комплексно-значными и определены на множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел. *Носителем* функции $f(x)$ называется замыкание множества точек x, в которых $f(x) \neq 0$. Носитель обозначается символом $\mathrm{supp}(f)$. Если $\mathrm{supp}(f)$ находится на конечном промежутке $[a, b]$, то $f(x)$ называется функцией с *компактным носителем*.

Некоторое свойство функции $f(x)$ выполняется *почти всюду* (*п. в.*), если множество точек, в которых это свойство не выполнено, имеет нулевую меру.

Векторное пространство E называется евклидовым, если в нем задано скалярное произведение (u, v). В этом случае для любого элемента $v \in E$ определены норма $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ и сходимость: $v_n \to v$, если $\|v_n - v\| \to 0$. Пространство E называется *гильбертовым,* если оно является полным относительно определенной выше сходимости. Система элементов $\{u_n, n \in \mathbf{Z}\}$ в гильбертовом пространстве E называется *ортонормированной,* если

$$(u_n, u_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}, \quad \text{для любых } n, m \in \mathbf{Z}.$$

Ортонормированная система $\{u_n\}$ в гильбертовом пространстве E называется *полной*, если замыкание множества всех линейных комбинаций элементов из $\{u_n\}$ совпадает с пространством E. Другими словами, если E является наименьшим замкнутым пространством, содержащим $\{u_n\}$. Полная ортонормированная система $\{u_n\}$ называется *ортонормированным базисом* гильбертова пространства E. Примером ортогонального базиса может служить система функций $\{1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, ...\}$ в гильбертовом пространстве $L^2[0, 2\pi]$ функций на $[0, 2\pi]$, интегрируемых с квадратом.

Элементарные гармоники – это наиболее простые сигналы вида

$a\sin(\omega x + \varphi_0)$ и $a\cos(\omega x + \varphi_0)$,

где a – амплитуда, ω – *круговая частота*, φ_0 – начальная фаза. Число $T = 2\pi/\omega$ есть период времени, за который система делает одно полное колебание. Величина $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ есть *частота*, число колебаний за единицу времени.

Аналоговым сигналом называется функция $f(x)$ действительного переменного $x \in \mathbf{R}$. Энергией сигнала $f(x)$ называется интеграл

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Другими интересными числовыми характеристиками сигнала $f(x)$ являются «моменты». *Начальным моментом* порядка n сигнала $f(x)$ называется интеграл

$$m_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx.$$

Центральным моментом порядка n называется интеграл

$$\mu_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^n f(x) dx.$$

Момент первого порядка m_1 имеет смысл математического ожидания m. Центральный момент второго порядка имеет смысл дисперсии и характеризует разброс значений $f(x)$ относительно m_1.

Если аргумент x принимает дискретный ряд значений $x = x_n$, $n \in \mathbf{Z}$, то значения $y_n = f(x_n)$ называются отсчетами, а весь набор значений $\{y_n\}$ – *выборкой*. *Дискретизация* непрерывного сигнала $f(x)$ – это замена его выборкой $\{y_n\}$. Такая процедура называется *оцифровкой* аналогового сигнала.

1.2. Ряды Фурье

Напомним основные факты теории рядов Фурье. Подробности и доказательства можно найти в любом учебнике по математическому анализу, см., напр., [АСЧ], [КФ].

Будем рассматривать функции $f(x)$ на $[0, 2\pi]$, *интегрируемые с квадратом*, то есть такие, для которых существует интеграл (Лебега) $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx$. Множество подобных функций образует гильбертово пространство $L^2[0, 2\pi]$. Скалярное произведение и норма в $L^2[0, 2\pi]$ определены следующим образом:

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx, \qquad \| f \|_2 = \sqrt{(f,f)},$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Полную ортогональную систему в $L^2[0, 2\pi]$ образуют функции

$\{1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, ...\}$.

Если $f(x) \in L^2[0, 2\pi]$, то для нее можно определить *ряд Фурье*:

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{2}$$

Из полноты тригонометрической системы следует, что ряд Фурье функции $f(x) \in L^2[0, 2\pi]$ сходится к $f(x)$ в пространстве $L^2[0, 2\pi]$. Это означает, что $\|f(x) - S_n(x)\|_{L^2} \to 0$, где $S_n(x)$ – частичные суммы ряда. Имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2.$$

С другой стороны, если сходится числовой ряд $a_0^2/2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2$, то ряд (1) сходится в L^2 к функции, у которой коэффициентами Фурье являются числа a_n и b_n.

Отметим также, что если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|$, то тригонометрический ряд (1) сходится равномерно, его сумма является непрерывной функцией и ряд (1) является рядом Фурье этой функции.

Комплексная форма ряда Фурье. Пусть

$$c_n=\frac{a_n+i\,b_n}{2},\quad c_{-n}=\frac{a_n-i\,b_n}{2},\quad n=0,1,2,\ldots$$

и $e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$. Тогда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{-inx}+c_{-n}e^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{-inx}.$$

Таким образом,

$$f(x)\to\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{-inx},\ \text{где}\ c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{inx}dx. \tag{3}$$

Равенство Парсеваля. Если функция $f(x)\in L^2[0,2\pi]$, то

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx.$$

Случай промежутка [0, 2N]. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[0,2N]$, где N – некоторое положительное число. Полную ортогональную систему в $L^2[0,2N]$ образуют функции:

$$\left\{1,\ \cos\frac{\pi}{N}nx,\ \sin\frac{\pi}{N}nx,\quad n=1,2,\ldots\right\}.$$

Ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x)\to\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi}{N}nx+b_n\sin\frac{\pi}{N}nx,$$

где

$$a_n=\frac{1}{N}\int_0^{2N}f(x)\cos\left(\frac{\pi}{N}nx\right)dx,\qquad b_n=\frac{1}{N}\int_0^{2N}f(x)\sin\left(\frac{\pi}{N}nx\right)dx.$$

В комплексной форме:

$$f(x) \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i\frac{\pi}{N}nx}, \quad \text{где} \quad c_n = \frac{1}{2N}\int_0^{2N} f(x) e^{i\frac{\pi}{N}nx}\,dx.$$

В приложениях функцию $f(x)$ часто называют сигналом. При разложении $f(x)$ в ряд Фурье величина каждого коэффициента a_n, b_n показывает, насколько значителен вклад гармоники $\cos nx$ или $\sin nx$ в формирование сигнала $f(x)$. Эти коэффициенты характеризуют интенсивности элементарных гармоник. Набор коэффициентов Фурье $\{a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$ называется спектром сигнала $f(x)$. Спектром считают также набор комплексных коэффициентов Фурье $\{c_n, n \in \mathbf{Z}\}$.

Замечание. Пусть $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}$ и $g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{-imx}$. Тогда коэффициенты Фурье произведения $f(x)g(x)$ получаются в виде свёртки коэффициентов c_k и d_m:

$$c_n(fg) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k}.$$

Действительно,

$$f(x)g(x) = \left(\sum_k c_n e^{-ikx}\right)\left(\sum_m d_m e^{-imx}\right) = \sum_{k,m} c_k d_m e^{-i(k+m)x} =$$

$$= \sum_n \left(\sum_{k+m=n} c_k d_m\right) e^{-inx} = \sum_n \left(\sum_k c_k d_{n-k}\right) e^{-inx} = \sum_n c_n(fg)\, e^{-inx}.$$

Приведем несколько примеров вычисления коэффициентов Фурье функций, которые будут в дальнейшем использоваться.

Пример 1. Коэффициенты Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |\, x \,| \le a \le \pi \\ 0, & \text{при остальных } x \end{cases}$$

на промежутке $[-\pi, \pi]$. Функция четная, поэтому все коэффициенты b_n равны нулю и соответствующий ряд Фурье содержит только косинусы. Коэффициенты Фурье a_n легко вычисляются:

$$a_0 = \frac{2a}{\pi}, \quad a_n = \frac{2\sin na}{\pi n}, \quad c_n = \frac{\sin na}{\pi n}, \quad f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin na}{\pi n}\cos nx.$$

В частности, если $a = \pi/2$, то

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n = 2k, k \ne 0, \\ (-1)^k \dfrac{2}{n\pi}, & n = 2k+1, \end{cases} \qquad c_n = c_{-n} = \frac{a_n}{2}.$$

Пример 2. Коэффициенты Фурье функции $f(x) = \cos^2(x/2)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$. Используя известную формулу $\cos^2(x/2) = (\cos x + 1)/2$, получаем два ненулевых коэффициента $a_0 = 1$, $a_1 = 1/2$. Для функции $f(x) = \sin^2(x/2)$ аналогично получаем: $a_0 = 1$, $a_1 = -1/2$.

Пример 3. Коэффициенты Фурье функции $f(x) = e^{ix/2}$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ находятся прямым вычислением:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix/2}e^{inx}dx = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

Коэффициенты Фурье функции $f(x) = e^{-ix/2}$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ следующие:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix/2}e^{inx}dx = -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n}{2n-1}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

В общем случае для функции $f(x) = e^{ikx/2}$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ имеем:

В случае четного $k = 2m$:

$$c_n = \begin{cases} 1, & n = -m, \\ 0 & n \neq -m \end{cases}.$$

В случае нечетного $k = 2m + 1$:

$$c_n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+m}}{2n + 2m + 1}.$$

Пример 4. Коэффициенты Фурье функции $f(x) = \cos(x/2)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$. Можно использовать пример 3 для нахождения комплексных коэффициентов либо непосредственным интегрированием, используя известную формулу $\cos\alpha \cdot \cos\beta = {}^1/_2(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$. В любом случае $\forall\, n \in \mathbf{N}$,

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{4}{\pi(4n^2-1)}, \quad c_n = c_{-n} = (-1)^{n+1}\frac{2}{\pi(4n^2-1)}.$$

1.3. Преобразование Фурье

В данном параграфе мы напомним основные факты, связанные с преобразованием Фурье. Все доказательства можно найти в учебниках по математическому анализу, см., напр., [АСЧ], [КФ].

Пусть $L^1(\mathbf{R})$ – пространство, состоящее из абсолютно интегрируемых функций на $\mathbf{R}$. Оно является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx.$$

Произведение $f(x)g(x)$ двух функций из пространства $L^1(\mathbf{R})$ может не принадлежать пространству $L^1(\mathrm{R})$. Тем не менее для функций класса $L^1(\mathbf{R})$ определена операция *свертки* $f * g$, превращающая пространство $L^1(\mathbf{R})$ в коммутативную банахову алгебру без единицы:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy. \tag{1}$$

Корреляция функций $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемых с квадратом на $\mathbf{R}$, определяется как следующий интеграл:

$$K_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\tau)\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x-\tau)}\,dx. \tag{2}$$

Корреляция показывает степень сходства функций $f(x)$ и $g(x)$ при различных значениях сдвигов по оси Ox. Хотя корреляция функций $f(x)$ и $g(x)$ по форме напоминает свертку, по существу имеются серьезные различия. Нет коммутативности относительно $f(x)$ и $g(x)$. Корреляция определена для функций из $L^2(\mathrm{R})$. При интегрировании переменная интегрирования x в функциях $f(x)$ и $g(x)$ ориентирована одинаково. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются некоррелированными, если $K_{fg}(\tau) = 0$. В случае $g(x) = f(x)$ функция $K_f(\tau) = K_{ff}(\tau)$ называется автокорреляционной функцией.

1.3.1. Преобразование Фурье в $L^1(\mathbf{R})$

Определение 1. *Преобразованием Фурье функции $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$ называется интеграл*

$$F[f] = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\omega}\,dx, \qquad \omega \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Переменная ω имеет смысл частоты. Поэтому переход от $f(x)$ к $\hat{f}(\omega)$ часто называют переходом из пространственной области в частотную.

Рассмотрим вопрос о восстановлении функции $f(x)$ по ее преобразованию Фурье $\hat{f}(\omega)$. Естественно ожидать, что $f(x)$ будет выражаться интегралом

$$F^{-1}[\hat{f}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{ix\omega}\,d\omega. \tag{4}$$

К сожалению, $\hat{f}(\omega)$ может оказаться неинтегрируемой. Например, для характеристической функции $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$ промежутка $[-1, 1]$ преобразованием Фурье будет функция $\hat{f}(\omega) = 2(\sin\omega)/\omega$. Хорошо известно, что она не является абсолютно интегрируемой на $\mathbf{R}$ (для нее существует только условно сходящийся несобственный интеграл Римана). Из свойства 1 преобразования Фурье (см. ниже) следует, что причина неинтегрируемости $\hat{f}(\omega)$ заключается в разрывности исходной функции $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$.

Для того чтобы обойти эту трудность с неинтегрируемостью $\hat{f}(\omega)$, обычно используют несобственные интегралы, то есть полагают

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega}\, d\omega = \lim_{a,b\to+\infty} \int_{-a}^{b} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega}\, d\omega.$$

Главное значение $V.p.\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega}\, d\omega$ несобственного интеграла получается, когда $a = b \to \infty$.

Обратным преобразованием Фурье называется выражение (4), в котором интеграл понимается как несобственный в смысле главного значения.

Хорошо известно, что равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega}\, d\omega \tag{5}$$

имеет место в точке $x \in \mathbf{R}$, если $f(x)$ удовлетворяет в этой точке условию Дини, а интеграл справа понимается в смысле главного значения. Приведем некоторые достаточные условия для обращения преобразования Фурье:

- если функции $f(x)$ и $\hat{f}(\omega)$ абсолютно интегрируемы, то равенство (5) имеет место в любой точке x, где $f(x)$ непрерывна;
- если $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$ непрерывна и кусочно-дифференцируема на $\mathbf{R}$, то имеет место формула (5) обращения преобразования Фурье.

Функция $f(x)$ называется кусочно-дифференцируемой на $\mathbf{R}$, если она дифференцируема всюду, кроме дискретного множества точек, в каждой из которых она имеет односторонние производные.