

Оглавление

Предисловие	12
Введение	14
Глава 1. Множества и отношения	21
1.1. Множества	21
1.1.1. Элементы и множества	21
1.1.2. Задание множеств	23
1.1.3. Парадокс Рассела	24
1.1.4. Мультимножества	25
1.1.5. Конечные последовательности	25
1.2. Алгебра подмножеств	27
1.2.1. Сравнение множеств	27
1.2.2. Равномощные множества	28
1.2.3. Конечные и бесконечные множества	29
1.2.4. Счётные и несчётные множества	29
1.2.5. Мощность конечного множества	31
1.2.6. Операции над множествами	33
1.2.7. Разбиения и покрытия	34
1.2.8. Булеан	35
1.2.9. Свойства операций над множествами	36
1.3. Представление множеств в программах	37
1.3.1. Битовые шкалы	37
1.3.2. Представление натуральных чисел	39
1.3.3. Перебор подмножеств заданного множества	42
1.3.4. Алгоритм построения бинарного кода Грея	44
1.3.5. Представление множеств упорядоченными списками	47
1.3.6. Проверка включения слиянием	47
1.3.7. Вычисление объединения слиянием	48
1.3.8. Вычисление пересечения слиянием	49
1.3.9. Представление множеств итераторами	49
1.4. Отношения	52
1.4.1. Упорядоченные пары и наборы	52
1.4.2. Прямое произведение множеств	53
1.4.3. Размеченное объединение множеств	54
1.4.4. Бинарные отношения	55
1.4.5. Композиция отношений	57
1.4.6. Свойства отношений	58
1.4.7. Степень отношения и циклы	60
1.4.8. Ядро отношения	61
1.4.9. Представление отношений в программах	62
1.5. Замыкание и сокращение отношений	63
1.5.1. Транзитивное и рефлексивное замыкание	64
1.5.2. Алгоритм Уоршалла вычисления транзитивного замыкания отношения	64
1.5.3. Транзитивное сокращение	65
1.5.4. Диаграммы Хассе	67
1.6. Функции	69
1.6.1. Функциональные отношения	70

1.6.2. Инъекция, сюръекция и биекция	70
1.6.3. Образы и прообразы	71
1.6.4. Суперпозиция функций	72
1.6.5. Степень функции	73
1.6.6. Представление функций в программах	74
1.7. Отношения эквивалентности	75
1.7.1. Классы эквивалентности	75
1.7.2. Ядро функционального отношения	77
1.7.3. Фактормножество	78
1.7.4. Множества уровня	79
1.7.5. Толерантность	79
1.7.6. Гомоморфизмы и изоморфизмы	80
1.8. Отношения порядка	82
1.8.1. Предпорядок	82
1.8.2. Частичный и линейный порядок	83
1.8.3. Минимальные и наименьшие элементы	86
1.8.4. Алгоритм топологической сортировки	87
1.8.5. Верхние и нижние границы	88
1.8.6. Монотонные и непрерывные функции	89
1.8.7. Наименьшая неподвижная точка функции	90
1.8.8. Вполне упорядоченные множества	92
1.8.9. Индукция	93
1.9. Характеристические функции	94
1.9.1. Классификация характеристических функций	94
1.9.2. Характеристические функции множеств	97
1.9.3. Характеристические функции отношений	99
1.9.4. Характеристические функции мультимножеств	100
1.9.5. Классификаторы	100
1.9.6. Нечёткие множества	102
Глава 2. Алгебраические структуры	104
2.1. Алгебры и морфизмы	104
2.1.1. Операции и их носители	104
2.1.2. Замыкания и подалгебры	105
2.1.3. Система образующих	106
2.1.4. Свойства операций	107
2.1.5. Гомоморфизмы и изоморфизмы алгебр	108
2.2. Алгебры с одной операцией	110
2.2.1. Полугруппы	110
2.2.2. Определяющие соотношения	111
2.2.3. Системы подстановок термов	112
2.2.4. Алгоритм Кнута–Бендикса	114
2.2.5. Моноиды	116
2.2.6. Группы	117
2.2.7. Действие группы на множестве	119
2.2.8. Группа перестановок	119
2.2.9. Перестановочные матрицы	121
2.3. Алгебры с двумя операциями	122
2.3.1. Кольца	122
2.3.2. Области целостности	123
2.3.3. Поля	124
2.4. Элементарная теория чисел	125
2.4.1. Делимость чисел	126
2.4.2. Наибольший общий делитель	127
2.4.3. Наименьшее общее кратное	129
2.4.4. Простые числа	130
2.4.5. Сравнения	133
2.4.6. Системы вычетов	134
2.4.7. Китайская теорема об остатках	135
2.4.8. Вычисления в остаточных классах	136
2.4.9. Функция Эйлера	136
2.5. Векторные пространства и модули	138

2.5.1. Векторные пространства	138
2.5.2. Линейные комбинации	139
2.5.3. Базис и размерность	140
2.5.4. Конечные поля	141
2.5.5. Модули	143
2.6. Решётки	144
2.6.1. Дистрибутивные и ограниченные решётки	144
2.6.2. Решётки с дополнением	145
2.6.3. Частичный порядок в решётке	146
2.6.4. Полные решётки	147
2.6.5. Полурешётки	147
2.6.6. Булевы алгебры	149
2.7. Матроиды и жадные алгоритмы	149
2.7.1. Матроиды	150
2.7.2. Максимальные независимые подмножества	150
2.7.3. Базисы	151
2.7.4. Жадный алгоритм	152
2.7.5. Примеры матроидов	153
Глава 3. Булевы функции	155
3.1. Элементарные булевы функции	155
3.1.1. Функции алгебры логики	155
3.1.2. Существенные и несущественные переменные	156
3.1.3. Булевы функции одной переменной	157
3.1.4. Булевы функции двух переменных	157
3.2. Функции k -значной логики	158
3.2.1. Формулы	159
3.2.2. Реализация функций формулами	159
3.2.3. Равносильные формулы	162
3.2.4. Подстановка и замена	163
3.2.5. Алгебра булевых функций	164
3.3. Двойственность и симметрия	165
3.3.1. Двойственные и самодвойственные функции	165
3.3.2. Реализация двойственной функции	167
3.3.3. Принцип двойственности	167
3.3.4. Симметрические функции	168
3.4. Нормальные формы	168
3.4.1. Разложение булевых функций по переменным	168
3.4.2. Минимальные термы	169
3.4.3. Совершенные нормальные формы	170
3.4.4. Эквивалентные преобразования	172
3.4.5. Минимальные дизъюнктивные формы	174
3.4.6. Геометрическая интерпретация	175
3.4.7. Сокращённые дизъюнктивные формы	176
3.5. Представление булевых функций в программах	177
3.5.1. Табличные представления	177
3.5.2. Строковые представления	178
3.5.3. Алгоритм вычисления значения булевой функции	179
3.5.4. Представление булевых функций арифметическими полиномами	180
3.5.5. Карты Карно	183
3.5.6. Представление булевой функции на карте Карно	185
3.5.7. Минимизация формул картами Карно	186
3.5.8. Деревья решений	189
3.6. Полные системы булевых функций	192
3.6.1. Замкнутые классы	192
3.6.2. Полные системы функций	194
3.6.3. Полнота двойственной системы	195
3.6.4. Теорема Поста	195
Глава 4. Логические исчисления	198
4.1. Логические связки и кванторы	199
4.1.1. Высказывания и связки	199

4.1.2. Формулы	199
4.1.3. Интерпретация	200
4.1.4. Логическое следование и логическая эквивалентность	201
4.1.5. Подстановка и замена	202
4.1.6. Кванторы	202
4.2. Формальные теории	206
4.2.1. Определение формальной теории	206
4.2.2. Выводимость	207
4.2.3. Интерпретация	207
4.2.4. Общезначимость и непротиворечивость	208
4.2.5. Полнота, независимость и разрешимость	208
4.3. Исчисление высказываний	209
4.3.1. Классическое определение исчисления высказываний	209
4.3.2. Частный случай формулы	209
4.3.3. Алгоритмы унификации	210
4.3.4. Конструктивное определение исчисления высказываний	212
4.3.5. Производные правила вывода	213
4.3.6. Дедукция	214
4.3.7. Некоторые теоремы исчисления высказываний	215
4.3.8. Множество теорем исчисления высказываний	217
4.3.9. Другие аксиоматизации исчисления высказываний	218
4.4. Исчисление предикатов	220
4.4.1. Определение исчисления предикатов	220
4.4.2. Интерпретация	222
4.4.3. Общезначимость	223
4.4.4. Непротиворечивость и полнота чистого исчисления предикатов	223
4.4.5. Логическое следование и логическая эквивалентность	224
4.4.6. Теория равенства	225
4.4.7. Формальная арифметика	225
4.4.8. Неаксиоматизируемые теории	226
4.4.9. Теоремы Гёделя о неполноте	227
4.5. Наивная теория алгоритмов	228
4.5.1. Алгоритмы	228
4.5.2. Вычислимые функции	230
4.5.3. Перечислимые множества	231
4.5.4. Разрешимые множества	234
4.5.5. Протокол выполнения алгоритма	235
4.5.6. Программы	236
4.5.7. Невычислимые функции и неразрешимые множества	238
4.5.8. Истинность и доказуемость	240
4.5.9. Множество истин арифметики	242
4.6. Автоматическое доказательство теорем	244
4.6.1. Постановка задачи автоматического доказательства теорем	244
4.6.2. Доказательство от противного	245
4.6.3. Сведение к дизъюнктам	245
4.6.4. Правило резолюции для исчисления высказываний	246
4.6.5. Правило резолюции для исчисления предикатов	247
4.6.6. Опровержение методом резолюций	248
4.6.7. Дерево вывода	249
4.6.8. Алгоритм метода резолюций	251
Глава 5. Комбинаторный анализ	252
5.1. Комбинаторные задачи	253
5.1.1. Комбинаторные конфигурации	253
5.1.2. Размещения	254
5.1.3. Размещения без повторов	254
5.1.4. Перестановки	255
5.1.5. Сочетания	256
5.1.6. Сочетания с повторениями	257
5.1.7. Дискретная вероятность	258
5.2. Перестановки	259
5.2.1. Циклы в перестановках	260

5.2.2. Порядок перестановки	262
5.2.3. Инверсии	263
5.2.4. Генерация перестановок	263
5.2.5. Двойные факториалы	265
5.2.6. Быстрая сортировка	266
5.2.7. Трудоёмкость в среднем	268
5.2.8. Гармонические числа	269
5.2.9. Оценка в среднем для быстрой сортировки	269
5.3. Биномиальные коэффициенты	270
5.3.1. Элементарные тождества	271
5.3.2. Бином Ньютона	271
5.3.3. Свойства биномиальных коэффициентов	272
5.3.4. Треугольник Паскаля	273
5.3.5. Генерация подмножеств	275
5.3.6. Расширенные биномиальные коэффициенты	277
5.3.7. Мультимножества и последовательности	278
5.3.8. Мультиномиальные коэффициенты	279
5.3.9. Биномиальная система счисления	280
5.4. Разбиения	281
5.4.1. Числа Стирлинга второго рода	281
5.4.2. Числа Стирлинга первого рода	282
5.4.3. Вычисление чисел Стирлинга	283
5.4.4. Число Белла	284
5.4.5. Треугольник Белла	284
5.5. Включения и исключения	286
5.5.1. Объединение конфигураций	286
5.5.2. Формула включений и исключений	287
5.5.3. Число булевых функций, существенно зависящих от всех своих переменных	288
5.5.4. Комбинации свойств	289
5.5.5. Беспорядки и субфакториал	289
5.6. Формулы обращения	290
5.6.1. Теорема обращения	291
5.6.2. Формулы обращения для биномиальных коэффициентов	291
5.6.3. Формулы для чисел Стирлинга	292
5.7. Производящие функции	292
5.7.1. Формальные степенные ряды	293
5.7.2. Метод неопределённых коэффициентов	293
5.7.3. Числа Фибоначчи	294
5.7.4. Числа Каталана	295
Глава 6. Кодирование	298
6.1. Алфавитное кодирование	299
6.1.1. Таблица кодов	299
6.1.2. Разделимые схемы	300
6.1.3. Префиксные схемы	300
6.1.4. Неравенство Крафта–Макмиллана	301
6.2. Кодирование с минимальной избыточностью	303
6.2.1. Минимизация длины кода сообщения	303
6.2.2. Цена кодирования	304
6.2.3. Алгоритм Фано	305
6.2.4. Оптимальное кодирование	306
6.2.5. Алгоритм Хаффмена	308
6.3. Помехоустойчивое кодирование	310
6.3.1. Кодирование с исправлением ошибок	310
6.3.2. Возможность исправления всех ошибок	312
6.3.3. Расстояния Левенштейна и Хэмминга	314
6.3.4. Кодовое расстояние	315
6.3.5. Мощность кодирования	316
6.3.6. Виды кодирования	318
6.3.7. Систематическая форма кодовых сообщений	320
6.3.8. Коды Хэмминга	321
6.3.9. Исправление одного замещения	323

6.4.	Сжатие и шифрование данных	324
6.4.1.	Сжатие текстов	324
6.4.2.	Предварительное построение словаря	324
6.4.3.	Алгоритм Лемпела–Зива	325
6.4.4.	Криптография	328
6.4.5.	Шифрование с помощью случайных чисел	329
6.4.6.	Криптостойкость	329
6.4.7.	Шифрование с открытым ключом	330
6.4.8.	Цифровая подпись	332
Глава 7.	Графы	333
7.1.	Определения графов	333
7.1.1.	История теории графов	333
7.1.2.	Основное определение	335
7.1.3.	Инцидентность, смежность и дополнение	336
7.1.4.	Диаграмма графа	336
7.1.5.	Орграфы, псевдографы, мультиграфы и гиперграфы	337
7.1.6.	Изоморфизм графов	338
7.2.	Элементы графов	339
7.2.1.	Подграфы	339
7.2.2.	Валентность	340
7.2.3.	Маршруты, цепи, циклы	341
7.2.4.	Связные и несвязные графы	342
7.2.5.	Расстояние между вершинами, ярусы и диаметр графа	342
7.2.6.	Эксцентриситет и центр	343
7.2.7.	Степенные последовательности	343
7.3.	Виды графов и операции над графами	346
7.3.1.	Полные и пустые графы	347
7.3.2.	Двудольные графы	347
7.3.3.	Направленные орграфы и сети	348
7.3.4.	Операции над графами	349
7.3.5.	Простые циклы	351
7.3.6.	Рёберные графы	352
7.4.	Представление графов в программах	354
7.4.1.	Требования к представлению графов	354
7.4.2.	Матрица смежности	354
7.4.3.	Матрица инцидентий	355
7.4.4.	Списки смежности	355
7.4.5.	Массив дуг	356
7.4.6.	Обходы графов	356
7.5.	Графы и отношения	360
7.5.1.	Орграфы и бинарные отношения	360
7.5.2.	Граф инцидентий	362
7.5.3.	Гиперграфы и многоместные отношения	363
7.5.4.	Достижимость и частичное упорядочение	364
7.5.5.	Достижимость и транзитивное замыкание	365
Глава 8.	Связность	366
8.1.	Компоненты связности	366
8.1.1.	Объединение графов и компоненты связности	366
8.1.2.	Точки сочленения, мосты и блоки	367
8.1.3.	Вершинная и рёберная связность	371
8.1.4.	Оценка числа рёбер	372
8.2.	Теорема Менгера	373
8.2.1.	Непересекающиеся цепи и разделяющие множества	373
8.2.2.	Теорема Менгера в «вершинной форме»	374
8.2.3.	Варианты теоремы Менгера	375
8.3.	Паросочетания	375
8.3.1.	Задачи о свадьбах, трансверселях и паросочетаниях	376
8.3.2.	Теорема Холла	376
8.3.3.	Устойчивые паросочетания	377
8.4.	Потоки в сетях	380

8.4.1. Определение потока	380
8.4.2. Разрезы	381
8.4.3. Теорема Форда–Фалкерсона	381
8.4.4. Алгоритм нахождения максимального потока	383
8.4.5. Связь между теоремой Менгера и теоремой Форда–Фалкерсона	384
8.5. Связность в орграфах	385
8.5.1. Сильная, односторонняя и слабая связность	385
8.5.2. Компоненты сильной связности	386
8.5.3. Выделение компонент сильной связности	386
8.6. Кратчайшие пути	388
8.6.1. Взвешенные графы	388
8.6.2. Кратчайшие пути в бесконтурном орграфе	390
8.6.3. Алгоритм Беллмана–Форда	391
8.6.4. Алгоритм Дейкстры	392
8.6.5. Алгоритм Флойда–Уоршалла	396
8.6.6. Алгоритмы с предобработкой	397
Глава 9. Деревья	399
9.1. Свободные деревья	399
9.1.1. Свободные деревья и их элементы	399
9.1.2. Основные свойства деревьев	400
9.1.3. Центр дерева	403
9.2. Ориентированные, упорядоченные и бинарные деревья	403
9.2.1. Ориентированные деревья	403
9.2.2. Эквивалентное определение порядка	405
9.2.3. Упорядоченные деревья	405
9.2.4. Бинарные деревья	408
9.3. Представление деревьев в программах	408
9.3.1. Представление свободных деревьев	408
9.3.2. Представление упорядоченных корневых деревьев	411
9.3.3. Число упорядоченных ориентированных деревьев	412
9.3.4. Проверка правильности скобочной структуры	414
9.3.5. Представление бинарных деревьев	414
9.3.6. Обходы бинарных деревьев	416
9.3.7. Алгоритмы симметричного обхода бинарного дерева	417
9.4. Деревья сортировки	418
9.4.1. Ассоциативная память	418
9.4.2. Способы реализации ассоциативной памяти	419
9.4.3. Алгоритм бинарного (двоичного) поиска	420
9.4.4. Алгоритм поиска в дереве сортировки	421
9.4.5. Алгоритм вставки в дерево сортировки	422
9.4.6. Алгоритм удаления из дерева сортировки	423
9.4.7. вспомогательные алгоритмы для дерева сортировки	425
9.4.8. Сравнение представлений ассоциативной памяти	426
9.5. Специальные деревья	426
9.5.1. Выровненные и полные деревья	426
9.5.2. Сбалансированные деревья	428
9.5.3. Балансировка деревьев	429
9.5.4. Двоичные кучи	430
9.5.5. Восстановление свойства двоичной кучи	432
9.5.6. Реализация операций двоичной кучи	433
9.5.7. Построение графа по степенному ряду	434
9.5.8. Дерево отрезков	435
9.5.9. Оценки эффективности дерева отрезков	438
9.6. Кратчайший остов	440
9.6.1. Стягивающие деревья и остовы	440
9.6.2. Схема алгоритма построения кратчайшего остова	441
9.6.3. Алгоритм Краскала	442
9.6.4. Алгоритм Прима	443
Глава 10. Циклы, независимость и раскраска	445
10.1. Фундаментальные циклы и разрезы	445

10.1.1. Циклы и разрезы	445
10.1.2. Фундаментальная система циклов и циклический ранг	447
10.1.3. Фундаментальная система разрезов и коциклический ранг	448
10.1.4. Подпространства циклов и коциклов	450
10.2. Эйлеровы циклы	451
10.2.1. Эйлеровы графы	451
10.2.2. Алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом графе	452
10.2.3. Оценка числа эйлеровых графов	453
10.3. Гамильтоновы циклы	453
10.3.1. Гамильтоновы графы	454
10.3.2. Задача коммивояжёра	455
10.3.3. Теорема Поша	456
10.4. Независимые и покрывающие множества	457
10.4.1. Независимые и покрывающие множества вершин и рёбер	457
10.4.2. Связь чисел независимости и покрытий	459
10.4.3. Оценка числа вершинной независимости	460
10.5. Построение независимых множеств вершин	461
10.5.1. Постановка задачи отыскания наибольшего независимого множества вершин	461
10.5.2. Поиск с возвратами	462
10.5.3. Улучшенный перебор	464
10.5.4. Алгоритм построения независимых множеств	465
10.6. Доминирующие множества	466
10.6.1. Минимальное и наименьшее доминирующее множество	466
10.6.2. Доминирование и независимость	466
10.6.3. Задача о наименьшем покрытии	467
10.6.4. Связь задачи о наименьшем покрытии с другими задачами	467
10.7. Раскраска графов	468
10.7.1. Оценки хроматического числа	468
10.7.2. Хроматические числа графа и его дополнения	469
10.7.3. Точный алгоритм раскрашивания	470
10.7.4. Приближённые алгоритмы раскрашивания	471
10.8. Планарность	472
10.8.1. Укладка графов	473
10.8.2. Эйлерова характеристика	473
10.8.3. Теорема о пяти красках	475
Указатель основных обозначений	476
Список литературы	479
Предметный указатель	480